Abriss

einer

Theorie der Abel'schen Functionen

von drei Variabeln.

Erster Theil.

Habilitationsschrift,

welche

mit Genehmigung der philosophischen Facultät der Universität Breslau

zur Erlangung der venia docendi

am 5. November 1878, Mittag 12 Uhr,

in der ~~grossen~~ kleinen Aula öffentlich vertheidigen wird

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

der Verfasser

Friedrich Schottky,
Dr. phil.,

gegen die Herren

Heinrich Vogt, Dr. phil., ord. Lehrer am Johannes-Gymnasium,

Eberhard Gothein, Dr. phil., Privat-Docent an der Universität Breslau.

BRESLAU, 1878.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0072

Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen dreier Variabeln.

In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht, aus den Sätzen, welche über die allgemeinen Theta-Functionen beliebig vieler Variabeln gelten, und unabhängig von der Theorie der algebraischen Integrale, zu einer Theorie der Abel'schen Functionen dreier Variabeln zu gelangen. Die Lösung dieser Aufgabe ist von Herrn Weber in der Abhandlung: „Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin 1876" begonnen worden, und ich würde ausgehen können von dem auf S. 37 der angeführten Schrift aufgestellten Additionstheorem. Indessen sei es gestattet, die Grundeigenschaften der Theta-Functionen, auf denen dasselbe beruht, hier noch einmal darzustellen, und zwar mit Anwendung der Methoden und Bezeichnungen von Herrn Weierstrass, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat. Der Inhalt der drei ersten Paragraphen rührt von Herrn Weierstrass her.

Erster Theil.

§ 1.

Die allgemeinste Theta-Function von ϱ Veränderlichen $(u_1, u_2 \ldots u_\varrho)$ ist definirt durch eine Reihe von der Form:

$$\sum_{(n_1, n_2 \ldots n_\varrho)} [e^{\bar{G}(u_1 \ldots u_\varrho; n_1 \ldots n_\varrho)}],$$

wo $\bar{G}(u_1 \cdots u_\varrho;\ n_1 \cdots n_\varrho)$ eine ganze Function zweiten Grades der 2ϱ Grössen $(u_1 \cdots u_\varrho,\ n_1 \cdots n_\varrho)$ bedeutet, und für $(n_1 \cdots n_\varrho)$ alle Systeme ganzer Zahlen zu setzen sind. Diese Function $\bar{G}$ lässt sich auf die Form bringen*):

$$\bar{G}(u_1 \cdots u_\varrho;\ n_1 \cdots n_\varrho)$$
$$= G(u_1 \cdots u_\varrho;\ n_1 + \nu_1 \cdots n_\varrho + \nu_\varrho) + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{\varrho} [\mu_\alpha (n_\alpha + \nu_\alpha)] + C,$$

*) Diese Umformung ist nur dann unmöglich, wenn die Determinante der ϱ^2 Grössen $\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial u_\alpha \partial n_\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2 \cdots \varrho)$ verschwindet; welchen Fall wir ausschliessen.

wo $G(u_1 \cdots u_\varrho,\ n_1+\nu_1 \cdots n_\varrho+\nu_\varrho)$ eine homogene Function zweiten Grades von $u_1 \cdots u_\varrho,\ n_1+\nu_1 \cdots n_\varrho+\nu_\varrho$ ist, und $\mu_1 \cdots \mu_\varrho,\ \nu_1 \cdots \nu_\varrho$, C, $2\varrho+1$ Constanten bedeuten. Die $\frac{2\varrho(2\varrho+1)}{2}$ Coefficienten der homogenen Function G betrachten wir als unveränderliche Grössen, $\mu_1 \cdots \mu_\varrho,\ \nu_1 \cdots \nu_\varrho$ dagegen als veränderliche Parameter, und bezeichnen die Summe

(1) $\sum [e^{G(u_1 \ldots;\ n_1+\nu_1 \ldots)+2\pi i \Sigma \mu_\alpha (n_\alpha+\nu_\alpha)}]$ durch $\Theta(u_1 \cdots u_\varrho;\ \mu_1, \nu_1 \cdots \mu_\varrho, \nu_\varrho)$,

oder, abgekürzt, durch

$$\Theta(u_1 \cdots u_\varrho;\ \mu,\ \nu).$$

Dies ist dann, bis auf einen constanten Factor, welcher noch hinzutreten kann, die allgemeinste Θ-Function. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe ist, dass der reelle Theil von $G(0 \cdots 0,\ \nu_1 \cdots \nu_\varrho)$ für alle reellen Werthe von $\nu_1 \cdots \nu_\varrho$ einen negativen Werth habe.

Zwei verschiedene Theta-Functionen lassen sich nun auf folgende Weise zu einander in Beziehung setzen. Es seien

$$w_1',\ w_2' \cdots w_\varrho';\ \nu_1',\ \nu_2' \cdots \nu_\varrho'$$

2ϱ neue unabhängige Grössen; alsdann lässt sich, wenn wir die linearen Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial w_\alpha'} G(w_1' \cdots \nu_1' \cdots) \text{ mit } G(w_1' \cdots \nu_1' \cdots)_\alpha,$$
$$\frac{\partial}{\partial \nu_\alpha'} G(w_1' \cdots \nu_1' \cdots) \text{ mit } G(w_1' \cdots \nu_1' \cdots)_{\varrho+\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots \varrho)$$

bezeichnen, $G(u_1+w_1' \cdots n_1+\nu_1+\nu_1' \cdots)$ in dieser Weise entwickeln:

$$G(u_1+w_1' \cdots n_1+\nu_1+\nu_1' \cdots) = G(w_1' \cdots \nu_1' \cdots)$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{\varrho} [u_\alpha G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot)_\alpha + (n_\alpha+\nu_\alpha) G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot)_{\varrho+\alpha}] + G(u_1 \cdot\cdot n_1+\nu_1 \cdot\cdot);$$

oder, da

$$G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot) = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\varrho} [w_\alpha' G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot)_\alpha + \nu_\alpha' G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot)_{\varrho+\alpha}]$$

ist:

$$G(u_1+w_1' \cdot\cdot n_1+\nu_1+\nu_1' \cdot\cdot)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\varrho} [(u_\alpha+\tfrac{1}{2}w_\alpha') G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot)_\alpha + (n_\alpha+\nu_\alpha+\tfrac{1}{2}\nu_\alpha') G(w_1' \cdot\cdot \nu_1' \cdot\cdot)_{\varrho+\alpha}]$$
$$+ G(u_1 \cdot\cdot n_1+\nu_1 \cdot\cdot).$$

Daraus folgt, wenn wir ν_α' mit $-\nu_\alpha'$ vertauschen, und dann $n_\alpha+\nu_\alpha'$ für n_α setzen:

$$G(u_1+w_1'\cdots n_1+\nu_1\cdot\cdot) = G(u_1\cdots n_1+\nu_1+\nu_1'\cdot\cdot)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[(u_\alpha+\tfrac{1}{2}w_\alpha')G(w_1'\cdots-\nu_1'\cdot\cdot)_\alpha+(n_\alpha+\nu_\alpha+\tfrac{1}{2}\nu_\alpha')G(w_1'\cdots-\nu_1'\cdot\cdot)_{\varrho+\alpha}].$$

Wir setzen nun

$$(2)\qquad G(w_1'\cdots-\nu_1'\cdot\cdot)_{\varrho+\alpha}=2\pi i\mu_\alpha',\quad G(w_1'\cdots-\nu_1'\cdot\cdot)_\alpha=2\bar{\eta}_\alpha',$$

und $2\bar{\omega}_\alpha'$ für w_α'. Alsdann ergiebt sich:

$$G(u_1+2\bar{\omega}_1'\cdots n_1+\nu_1\cdot\cdot) = G(u_1\cdots n_1+\nu_1+\nu_1'\cdot\cdot)$$

$$+2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[\mu_\alpha'(n_\alpha+\nu_\alpha+\nu_\alpha')]$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\eta}_\alpha'(u_\alpha+\bar{\omega}_\alpha')-\pi i\mu_\alpha'\nu_\alpha'].$$

Daher:

$$G(u_1+2\bar{\omega}_1'\cdots n_1+\nu_1\cdot\cdot)+2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[\mu_\alpha(n_\alpha+\nu_\alpha)]$$

$$=G(u_1\cdots n_1+\nu_1+\nu_1'\cdot\cdot)+2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[(\mu_\alpha+\mu_\alpha')(n_\alpha+\nu_\alpha+\nu_\alpha')]$$

$$-2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\varrho}\mu_\alpha\nu_\alpha'+\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\eta}_\alpha'(u_\alpha+\bar{\omega}_\alpha')-\pi i\mu_\alpha'\nu_\alpha'].$$

Aus dieser Umformung des Exponenten in dem Reihen-Ausdruck der Function $\Theta(u_1+2\bar{\omega}_1'\cdots;\ \mu,\nu)$ folgt:

$$(3)\qquad e^{-\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\eta}_\alpha'(u_\alpha+\bar{\omega}_\alpha')-\pi i\mu_\alpha'\ \alpha}\Theta(u_1+2\bar{\omega}_1'\cdots;\mu,\nu)$$

$$=e^{-2\pi i\sum\mu_\alpha\nu_\alpha'}\Theta(u_1\cdots;\mu+\mu',\nu+\nu').$$

Wir fassen jetzt $\mu_1'\cdots\mu_\varrho'$, $\nu_1'\cdots\nu_\varrho'$ als unabhängige Grössen auf. Dann ergiebt sich aus dem Gleichungssystem (2), dass die Grössen $2\bar{\omega}_\alpha'$, $2\bar{\eta}_\alpha'$ lineare homogene Functionen derselben sind:

$$(4)\quad 2\bar{\omega}_\alpha'=\sum_{\beta=1}^{\varrho}[2\mu_\beta'\omega_{\alpha\beta}+2\nu_\beta'\omega_{\alpha\beta}'],\ 2\bar{\eta}_\alpha'=\sum_{\beta=1}^{\varrho}[2\mu_\beta'\eta_{\alpha\beta}+2\nu_\beta'\eta_{\alpha\beta}']$$

$$(\alpha=1,\ 2\cdots\varrho).$$

Den Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\eta}_\alpha'(u_\alpha+\bar{\omega}_\alpha')-\pi i\mu_\alpha'\nu_\alpha'],$$

welcher eine lineare Function der ϱ Variabeln u, dagegen eine quadratische Function der 2ϱ Grössen μ', ν' ist, bezeichnen wir durch $\eta(u_1\cdots u_\varrho;\mu',\nu')$; wir erhalten dann:

(3′) $e^{-\eta(u_1\cdots;\mu',\nu')}\Theta(u_1+2\bar{\omega}_1'\cdots;\mu,\nu)=e^{-2\pi i\Sigma\mu_\alpha\nu'_\alpha}\Theta(u_1\cdots;\mu+\mu',\nu+\nu')$.

Die $4\varrho^2$ Grössen $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$, welche hier als Coefficienten eines Systems linearer Functionen definirt sind, sind ganzzahlige rationale Functionen der $\frac{2\varrho(2\varrho+1)}{2}$ Coefficienten von G. Es müssen daher zwischen ihnen $\frac{2\varrho(2\varrho-1)}{2}$ Relationen bestehen. Diese erhalten wir auf folgende Weise.

Es seien $\mu_1\cdots\mu_\varrho$, $\nu_1\cdots\nu_\varrho$ und $\mu_1'\cdots\mu_\varrho'$, $\nu_1'\cdots\nu_\varrho'$ zwei Systeme von je 2ϱ unabhängigen Grössen, und

$$2\bar{\omega}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\varrho}[2\mu_\beta\,\omega_{\alpha\beta}+2\nu_\beta\,\omega'_{\alpha\beta}],\quad 2\bar{\eta}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\varrho}[2\mu_\beta\,\eta_{\alpha\beta}+2\nu_\beta\,\eta'_{\alpha\beta}],$$

$$2\bar{\omega}_\alpha'=\sum_{\beta=1}^{\varrho}[2\mu_\beta'\omega_{\alpha\beta}+2\nu_\beta'\omega'_{\alpha\beta}],\quad 2\bar{\eta}_\alpha'=\sum_{\beta=1}^{\varrho}[2\mu_\beta'\eta_{\alpha\beta}+2\nu_\beta'\eta'_{\alpha\beta}].$$

Alsdann folgt, da die beiden Gleichungssysteme (2) und (4) gleichzeitig bestehen:

$$G(2\bar{\omega}_1\cdots-\nu_1\cdots)_{\varrho+\alpha}=2\pi i\mu_\alpha,\quad G(2\bar{\omega}_1\cdots-\nu_1\cdots)_\alpha=2\bar{\eta}_\alpha,$$
$$G(2\omega_1'\cdots-\nu_1'\cdots)_{\varrho+\alpha}=2\pi i\mu_\alpha',\quad G(2\bar{\omega}_1'\cdots-\nu_1'\cdots)_\alpha=2\bar{\eta}_\alpha'.$$

Nun ist, nach einem bekannten Satz über die quadratischen Formen:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\omega}_\alpha'G(2\bar{\omega}_1\cdots-\nu_1\cdots)_\alpha-\nu_\alpha'G(2\bar{\omega}_1\cdots-\nu_1\cdots)_{\varrho+\alpha}]$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\omega}_\alpha\,G(2\bar{\omega}_1'\cdots-\nu_1'\cdots)_\alpha-\nu_\alpha\,G(2\bar{\omega}_1'\cdots-\nu_1'\cdots)_{\varrho+\alpha}].$$

Folglich:

$$(5)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\bar{\omega}_\alpha'\cdot2\bar{\eta}_\alpha-2\bar{\omega}_\alpha\cdot2\bar{\eta}_\alpha']=2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[\mu_\alpha\nu_\alpha'-\mu_\alpha'\nu_\alpha].$$

Indem wir diese Gleichung specialisiren, erhalten wir:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\omega_{\alpha\beta}\cdot2\eta_{\alpha\gamma}-2\eta_{\alpha\beta}\cdot2\omega_{\alpha\gamma}]=0$$

$$(6)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\omega'_{\alpha\beta}\cdot2\eta'_{\alpha\gamma}-2\eta'_{\alpha\beta}\cdot2\omega'_{\alpha\gamma}]=0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho}[2\omega'_{\alpha\beta}\cdot2\eta_{\alpha\gamma}-2\eta'_{\alpha\beta}\cdot2\omega_{\alpha\gamma}]=\begin{cases}2\pi i & \text{wenn } \beta=\gamma,\\ 0 & \text{wenn } \beta\lesseqgtr\gamma.\end{cases}$$

Es sei jetzt $(p_1\cdots p_\varrho,\ q_1\cdots q_\varrho)$ ein beliebiges System von 2ϱ ganzen Zahlen, und

$$2\varpi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\varrho} [2p_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2q_\beta \omega_{\alpha\beta}], \quad 2\eta_\alpha = \sum [2p_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2q_\alpha \eta'_{\alpha\beta}] \qquad (\alpha = 1, 2 \cdots \varrho).$$

Dann folgt aus der Formel (3'):

$$e^{-\eta(u_1 \cdots; p, q)} \Theta(u_1 + 2\varpi_1 \cdots; \mu, \nu) = e^{-2\pi i \Sigma(\mu_\alpha q_\alpha)} \Theta(u_1 \cdots; \mu + p, \nu + q).$$

Es ist aber, wie unmittelbar aus der analytischen Darstellung der Theta-Function hervorgeht, für ganze Zahlen p, q:

$$(7) \qquad \Theta(u_1 \cdots; \mu + p, \nu + q) = e^{2\pi i \Sigma p_\alpha \nu_\alpha} \Theta(u_1 \cdots; \mu, \nu).$$

Daher erhalten wir:

$$(8) \quad e^{-\eta(u_1 \cdots; p, q)} \Theta(u_1 + 2\varpi_1 \cdots; \mu, \nu) = e^{2\pi i \Sigma(p_\alpha \nu_\alpha - q_\alpha \mu_\alpha)} \Theta(u_1 \cdots; \mu, \nu).$$

Dies ist die charakteristische Gleichung der Function $\Theta(u_1 \cdots u_\varrho; \mu, \nu)$. Wissen wir von einer Function $F(u_1 \cdots u_\varrho)$, dass sie für alle endlichen Werthsysteme der Variabeln den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt, und für willkürliche ganze Zahlen p, q der Gleichung (8) genügt, so ist

$$F(u_1 \cdots u_\varrho) = \text{Const.}\, \Theta(u_1 \cdots u_\varrho; \mu, \nu).$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Grössen $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$ die Gleichungen (6) befriedigen. Dies ist ein bekannter Satz.

§ 2.

Bilden wir jetzt ein Product von r Theta-Functionen:

$$\Theta(u_1 \cdots; \mu^{(1)}, \nu^{(1)}) \Theta(u_1 \cdots; \mu^{(2)}, \nu^{(2)}) \cdots \Theta(u_1 \cdots; \mu^{(r)}, \nu^{(r)}) = \Pi(u_1 \cdots u_\varrho),$$

so folgt aus (8), dass dieser Ausdruck der Bedingung

$$(9) \quad e^{-r\eta(u_1 \cdots u_\varrho; p, q)} \Pi(u_1 + 2\varpi_1 \cdots) = e^{2\pi i \Sigma(p_\alpha \nu_\alpha - q_\alpha \mu_\alpha)} \Pi(u_1 \cdots u_\varrho)$$

genügt, wo

$$\nu_\alpha = \nu_\alpha^{(1)} + \nu_\alpha^{(2)} + \cdots + \nu_\alpha^{(r)}, \quad \mu_\alpha = \mu_\alpha^{(1)} + \mu_\alpha^{(2)} + \cdots + \mu_\alpha^{(r)}$$

ist. Dieselbe Gleichung gilt offenbar für das Product

$$\Theta(u_1 + v_1^{(1)} \cdots; \mu^{(1)}, \nu^{(1)}) \Theta(u_1 + v_1^{(2)} \cdots; \mu^{(2)}, \nu^{(2)}) \cdots \Theta(u_1 + v_1^{(r)} \cdots; \mu^{(r)}, \nu^{(r)}),$$

wo $v_1^{(1)} \cdots v_\varrho^{(1)} \cdots v_1^{(r)} \cdots v_\varrho^{(r)}$ $r\varrho$ Constanten sind, die nur den ϱ Bedingungen:

$$v_\alpha^{(1)} + v_\alpha^{(2)} + \cdots + v_\alpha^{(r)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2 \cdots \varrho)$$

zu genügen brauchen. Jede Function, die für alle endlichen Werthe von $u_1 \cdots u_\varrho$ den Charakter einer ganzen rationalen Function besitzt, und die in der Gleichung (9) ausgesprochene Bedingung erfüllt, nennen

wir eine Θ-Function r^{ter} Ordnung mit der Charakteristik (μ, ν). Für diese gilt der folgende Fundamentalsatz:

I. *Alle Θ-Functionen r^{ter} Ordnung, welche dieselbe Charakteristik haben, lassen sich linear und homogen durch r^ϱ unter ihnen ausdrücken.*

Es sei $\Pi(u_1 \cdots u_\varrho)$ irgend eine solche Function, die der Gleichung (9) genügt. Wir können aus dieser ein ganzes System von Ausdrücken bilden, deren jeder dieselbe Gleichung erfüllt. Wir bezeichnen zu diesem Zweck mit $\mu_1' \cdots \mu_\varrho'$, $\nu_1' \cdots \nu_\varrho'$ ein System von 2ϱ willkürlichen Grössen, und setzen:

$$2\bar{\omega}_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{\varrho} [2\mu_\beta' \omega_{\alpha\beta} + 2\nu_\beta' \omega'_{\alpha\beta}],\quad 2\bar{\eta}_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{\varrho} [2\mu_\beta' \eta_{\alpha\beta} + 2\nu_\beta' \eta'_{\alpha\beta}],$$

$$(10)\qquad e^{-r\eta(u_1 \cdots; \mu', \nu')} \Pi(u_1 + 2\bar{\omega}_1' \cdots) = \Pi(u_1 \cdots; \mu', \nu').$$

Wenn für μ', ν' ganze Zahlen p, q gesetzt werden, so ist der Gleichung (9) zufolge:

$$(11)\qquad \Pi(u_1 \cdots; p, q) = e^{2\pi i \Sigma(p_\alpha \nu_\alpha - q_\alpha \mu_\alpha)} \Pi(u_1 \cdots).$$

Sind jetzt $\mu_1'' \cdots \mu_\varrho''$, $\nu_1'' \cdots \nu_\varrho''$ 2ϱ neue Variable und $2\bar{\omega}_\alpha''$, $2\bar{\eta}_\alpha''$ die entsprechenden linearen Functionen derselben, so folgt aus Gleichung (10):

$$\Pi(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots; \mu', \nu') = e^{-r\eta(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots; \mu', \nu')} \Pi(u_1 + 2\bar{\omega}_1' + 2\bar{\omega}_1'' \cdots),$$

$$\Pi(u_1 + 2\bar{\omega}_1' + 2\bar{\omega}_1'' \cdots) = e^{r\eta(u_1 \cdots; \mu' + \mu'', \nu' + \nu'')} \Pi(u_1 \cdots; \mu' + \mu'', \nu' + \nu'').$$

Nun ist

$$\eta(u_1 \cdots; \mu' + \mu'', \nu' + \nu'') = \sum [(2\bar{\eta}_\alpha' + 2\bar{\eta}_\alpha'')(u_\alpha + \bar{\omega}_\alpha' + \bar{\omega}_\alpha'') - \pi i(\mu_\alpha' + \mu_\alpha'')(\nu_\alpha' + \nu_\alpha'')],$$

$$\eta(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots; \mu', \nu') = \sum [2\bar{\eta}_\alpha'(u_\alpha + 2\bar{\omega}_\alpha'' + \bar{\omega}_\alpha') - \pi i \mu_\alpha' \nu_\alpha'],$$

$$\eta(u_1 \cdots; \mu'', \nu'') = \sum [2\bar{\eta}_\alpha''(u_\alpha + \bar{\omega}_\alpha'') - \pi i \mu_\alpha'' \nu_\alpha''].$$

Daraus folgt:

$$\eta(u_1 \cdots; \mu' + \mu'', \nu' + \nu'') - \eta(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots; \mu', \nu') - \eta(u_1 \cdots; \mu'', \nu'') = \sum [2\bar{\eta}_\alpha'' \bar{\omega}_\alpha' - 2\bar{\eta}_\alpha' \bar{\omega}_\alpha'' - \pi i(\mu_\alpha' \nu_\alpha'' + \mu_\alpha'' \nu_\alpha')].$$

Es ist aber nach Formel (5)

$$\sum [2\bar{\eta}_\alpha'' \bar{\omega}_\alpha' - 2\bar{\eta}_\alpha' \bar{\omega}_\alpha''] = \pi i \sum [\mu_\alpha'' \nu_\alpha' - \mu_\alpha' \nu_\alpha''].$$

Folglich:

$$\eta(u_1 \cdots; \mu' + \mu'', \nu' + \nu'') - \eta(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots; \mu', \nu') = \eta(u_1 \cdots; \mu'', \nu'') - 2\pi i \sum (\mu_\alpha' \nu_\alpha'').$$

Demnach ergiebt sich:

$$(12)\qquad e^{-r\eta(u_1\cdots;\,\mu'',\nu'')}\Pi(u_1+2\bar{\omega}_1''\cdots;\,\mu',\nu') = e^{-2\pi i r\Sigma(\mu_\alpha'\nu_\alpha'')}\Pi(u_1\cdots;\,\mu'+\mu'',\nu'+\nu'').$$

Setzen wir hier für μ', ν' ganze Zahlen p, q, so ist nach Formel (11)

$$\Pi(u_1+2\bar{\omega}_1''\cdots;p,q) = e^{2\pi i\Sigma(p_\alpha\nu_\alpha-q_\alpha\mu_\alpha)}\Pi(u_1+2\bar{\omega}_1''\cdots).$$

Da aber

$$e^{-r\eta(u_1\cdots;\,\mu'',\nu'')}\Pi(u_1+2\bar{\omega}_1''\cdots) = \Pi(u_1\cdots;\,\mu'',\nu'')$$

ist, so folgt:

$$(13)\quad \Pi(u_1\cdots;\,\mu''+p,\,\nu''+q) = e^{2\pi i\Sigma[p_\alpha(\nu_\alpha+r\nu_\alpha'')-q_\alpha\mu_\alpha]}\Pi(u_1\cdots;\,\mu'',\nu'').$$

Aus diesen beiden Gleichungen (12) und (13) entspringt nun, indem wir für μ'', ν'' ganze Zahlen p, q setzen, die charakteristische Gleichung für die Function $\Pi(u_1\cdots;\mu',\nu')$:

$$(14)\qquad e^{-r\eta(u_1\cdots;p,q)}\Pi(u_1+2\bar{\omega}_1\cdots;\,\mu',\nu') = e^{2\pi i\Sigma[p_\alpha(\nu_\alpha+r\nu_\alpha')-q_\alpha(\mu_\alpha+r\mu_\alpha')]}\Pi(u_1\cdots;\,\mu',\nu').$$

Diese Formel lehrt zugleich, dass, wenn wir die Grössen μ', ν' als rationale Zahlen mit dem Nenner r annehmen, die Functionen $\Pi(u_1\cdots;\mu',\nu')$ sämmtlich die Gleichung (9) befriedigen. Wir setzen nun die Grössen ν' sämmtlich gleich Null, dagegen

$$\mu_\alpha' = \frac{\delta_\alpha}{r},\quad (\alpha = 1,\ 2\cdots\varrho),$$

wo jede der Zahlen δ_1, $\delta_2\cdots\delta_\varrho$ einen der Werthe $0,\ 1,\ 2\cdots r-1$ haben soll. Da es r^ϱ solche Systeme giebt, erhalten wir somit r^ϱ verschiedene Functionen $\Pi(u_1\cdots;\frac{\delta}{r},\,0)$. Wir setzen ferner in der Gleichung (12) für $\nu_1''\cdots\nu_\varrho''$ ganze Zahlen, für $\mu_1''\cdots\mu_\varrho''$ irgendwelche rationale Zahlen mit dem Nenner r. Dann erhalten wir:

$$2\bar{\omega}_\alpha'' = \sum\left[2p_\beta\frac{\omega_{\alpha\beta}}{r}+2q_\beta\omega_{\alpha\beta}'\right],\quad 2\bar{\eta}_\alpha'' = \frac{1}{r}\sum\left[2p_\beta\eta_{\alpha\beta}+2q_\beta r\eta_{\alpha\beta}'\right],$$

$$e^{-r\eta(u_1\cdots;\,\frac{p}{r},\,q)}\Pi(u_1+2\bar{\omega}_1''\cdots;\frac{\delta}{r},\,0) = \Pi(u_1\cdots;\,\frac{\delta+p}{r},\,q).$$

Setzen wir nun

$$\frac{\delta_\alpha+p_\alpha}{r} = \frac{\delta_\alpha'}{r}+P_\alpha,\ (\alpha=1,\ 2\cdots\varrho),$$

wo $\delta_1'\cdots\delta_\varrho'$ wiederum Zahlen der Reihe $0,\ 1\cdots r-1$, und $P_1\cdots P_\varrho$ ganze Zahlen sind, so ist nach Formel (13):

$$\Pi(u_1 \cdots; \frac{\delta+p}{r}, q) = e^{2\pi i \Sigma\left[\frac{\delta_\alpha+p_\alpha-\delta'_\alpha}{r} \nu_\alpha - q_\alpha \mu_\alpha\right]} \Pi(u_1 \cdots; \frac{\delta'}{r}, 0).$$

Folglich:

$$(15) \quad \begin{aligned} & e^{-r\eta(u_1 \cdots; \frac{p}{r}, q)} e^{-2\pi i \Sigma \frac{\delta_\alpha \nu_\alpha}{r}} \Pi(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots; \frac{\delta}{r}, 0) \\ &= e^{2\pi i \Sigma\left(\frac{p_\alpha \nu_\alpha}{r} - q_\alpha \mu_\alpha\right)} e^{-2\pi i \Sigma \frac{\delta'_\alpha \nu_\alpha}{r}} \Pi(u_1 \cdots; \frac{\delta'}{r}, 0). \end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Formel für $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_\varrho$ alle r^ϱ verschiedenen Zahlsysteme setzen, so durchlaufen $\delta_1' \cdots \delta_\varrho'$ dieselben Werthe. Setzen wir also

$$\sum_{(\delta)} \left[e^{-2\pi i \Sigma \frac{\delta_\alpha \nu_\alpha}{r}} \Pi(u_1 \cdots; \frac{\delta}{r}, 0)\right] = S(u_1 \cdots u_\varrho),$$

(die Summe erstreckt über alle r^ϱ Systeme der Zahlen δ), so ist

$$(16) \quad e^{-r\eta(u_1 \cdots; \frac{p}{r}, q)} S(u_1 + 2\bar{\omega}_1'' \cdots) = e^{2\pi i \Sigma\left(\frac{p_\alpha \nu_\alpha}{r} - q_\alpha \mu_\alpha\right)} S(u_1 \cdots).$$

Wir setzen jetzt

$$2\bar{\omega}_\alpha = \sum [2p_\beta \frac{\omega_{\alpha\beta}}{r} + q_\beta \omega'_{\alpha\beta}], \quad 2\bar{\eta}_\alpha = \sum [2p_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2q_\beta r \eta'_{\alpha\beta}].$$

Dann ist

$$2\bar{\omega}_\alpha'' = 2\bar{\omega}_\alpha, \quad 2\bar{\eta}_\alpha'' = \frac{1}{r} \cdot 2\bar{\eta}_\alpha,$$

$$r\eta(u_1 \cdots; \frac{p}{r}, q) = \sum [2\bar{\eta}_\alpha (u_\alpha + \bar{\omega}_\alpha) - \pi i p_\alpha q_\alpha].$$

Daraus geht hervor, dass die Formel (15) vollständig übereinstimmt mit der in (8) gegebenen charakteristischen Gleichung der Function $\Theta(u_1 \cdots; \mu, \nu)$, wenn wir in derselben die Grössen ν_α ersetzen durch $\frac{\nu_\alpha}{r}$, $\omega_{\alpha\beta}$ durch $\frac{\omega_{\alpha\beta}}{r}$, $\eta'_{\alpha\beta}$ durch $r\eta'_{\alpha\beta}$. Da aber die Relationen (6) bestehen bleiben, wenn wir die Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$ ersetzen durch: $\frac{\omega_{\alpha\beta}}{r}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$, $r\eta'_{\alpha\beta}$, so ist durch die Gleichung (15), dem zuletzt in § 1 angeführten Satz zufolge, $S(u_1 \cdots u_\varrho)$ bis auf einen constanten Factor vollständig bestimmt, und zwar

$$S(u_1 \cdots u_\varrho) = \text{Const. } \Theta^r\left(u_1 \cdots u_\varrho; \mu, \frac{\nu}{r}\right),$$

wo $\Theta^r\left(u_1 \cdots u_\varrho; \mu, \frac{\nu}{r}\right)$ diejenige Function ist, die aus $\Theta\left(u_1 \cdots u_\varrho; \mu, \frac{\nu}{r}\right)$ durch die angegebene Vertauschung der Grössen ω und η entsteht. Wir erhalten also:

$$(17)\quad \sum_{(\delta)}\left[e^{-2\pi i\,\Sigma\left(\frac{\delta_\alpha \nu_\alpha}{r}\right)}\Pi\left(u_1\cdots;\ \frac{\delta}{r},\ 0\right)\right] = \text{Const.}\ \Theta^r\left(u_1\cdots u_\varrho;\ \mu,\ \frac{\nu}{r}\right).$$

Die Gleichung (15) bleibt ungeändert, wenn wir $\nu_1 \cdots \nu_\varrho$ um beliebige ganze Zahlen vermehren. Daraus folgt, dass auch die Gleichung:

$$(18)\quad \sum_{(\delta)}\left[e^{-2\pi i\,\Sigma\left[\frac{\delta_\alpha(\nu_\alpha+n_\alpha)}{r}\right]}\Pi\left(u_1\cdots;\ \frac{\delta}{r},\ 0\right)\right] = (n_1\cdots n_\varrho)\,\Theta^r\left(u_1\cdots u_\varrho;\ \mu,\ \frac{\nu+n}{r}\right)$$

besteht. Hier geben wir jeder der Zahlen n die Werthe $0,\ 1\cdots r-1$, und summiren über die r^ϱ verschiedenen Systeme. Dann ist

$$\sum_{(n)}\left[e^{-2\pi i\,\Sigma\frac{\delta_\alpha n_\alpha}{r}}\right]$$

$= 0$, wenn irgend eine der Zahlen $\delta_1 \cdots \delta_\varrho$ von 0 verschieden ist, dagegen $= r^\varrho$, wenn alle diese Zahlen gleich 0 sind. Daraus ergiebt sich:

$$(19)\qquad \Pi(u_1\cdots u_\varrho) = r^{-\varrho}\sum_{(n)}\left[(n_1\cdots n_\varrho)\,\Theta^r\left(u_1\cdots u_\varrho;\ \mu,\ \frac{\nu+n}{r}\right)\right].$$

Hiermit ist der aufgestellte Satz bewiesen. Denn es ist $\Pi(u_1 \cdots u_\varrho)$ dargestellt durch r^ϱ bestimmte Functionen. Jede derselben ist (wie aus (18) hervorgeht) eine Theta-Function r^{ten} Grades mit der Charakteristik $(\mu,\ \nu)$. Zwischen diesen r^ϱ Grössen besteht keine lineare Gleichung. Denn aus der Formel (19) lässt sich rückwärts die Gleichung (18) ableiten; nehmen wir also in (19) $\Pi(u_1 \cdots u_\varrho) = 0$ an, so folgt aus (18), dass die sämmtlichen Coefficienten $(n_1 \cdots n_\varrho)$ gleich 0 sein müssen.

§ 3.

Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass $\Pi(u_1 \cdots u_\varrho)$ eine grade oder eine ungrade Function ist:

$$(20)\qquad \Pi(-u_1\cdots -u_\varrho) = \varkappa\Pi(u_1\cdots u_\varrho);\quad \varkappa = \pm 1.$$

Geben wir in der Gleichung (9) den Grössen $u_1 \cdots u_\varrho;\ p_1 \cdots p_\varrho;\ q_1 \cdots q_\varrho$ die entgegengesetzten Werthe, so erhalten wir, da

$$\eta(-u_1\cdots -u_\varrho;\ -p,\ -q) = \eta(u_1\cdots u_\varrho;\ p,\ q)$$

ist:

$$\varkappa e^{-r\,\eta(u_1\cdots u_\varrho;\,p,\,q)}\Pi(u_1+2\varpi_1\cdots) = \varkappa e^{2\pi i\Sigma(-p_\alpha\nu_\alpha+q_\alpha\mu_\alpha)}\Pi(u_1\cdots u_\varrho).$$

Daraus folgt, dass, wenn die Voraussetzung (20) erfüllt sein soll, der Ausdruck

$$2\,\Sigma(p_\alpha\nu_\alpha - q_\alpha\mu_\alpha)$$

für alle ganzzahligen Werthe der Grössen $p,\ q$ selbst eine ganze Zahl sein muss. Es müssen deshalb $\mu_1 \cdots \mu_\varrho,\ \nu_1 \cdots \nu_\varrho$ die Hälften ganzer

Zahlen sein. Da die Gleichung (9) nicht geändert wird, wenn wir zu $\mu_1 \cdot\cdot \mu_\varrho$, $\nu_1 \cdot\cdot \nu_\varrho$ beliebige ganze Zahlen hinzufügen, so können wir annehmen, dass jede der Grössen $\mu_1 \cdot\cdot \mu_\varrho$, $\nu_1 \cdot\cdot \nu_\varrho$ den Werth 0 oder $\frac{1}{2}$ hat.

Es ist nun

$$\Pi(u_1 \cdot\cdot u_\varrho) = r^{-\varrho} \sum_{(n)} \left[(n_1 \cdot\cdot n_\varrho)\, \Theta^r\left(u_1 \cdot\cdot u_\varrho;\ \mu,\ \frac{\nu+n}{r}\right)\right].$$

Hieraus folgt, wenn wir den Variabeln $u_1 \cdot\cdot u_\varrho$ die entgegengesetzten Werthe geben, da, wie aus der analytischen Darstellung dieser Function ersichtlich ist,

$$\Theta(-u_1 \cdot\cdot -u_\varrho;\ -\mu,\ -\nu) = \Theta(u_1 \cdot\cdot u_\varrho;\ \mu,\ \nu),$$

$$\Pi(u_1 \cdot\cdot u_\varrho) = r^{-\varrho} \sum_{(n)} \left[\varkappa (n_1 \cdot\cdot n_\varrho)\, \Theta^r\left(u_1 \cdot\cdot u_\varrho;\ -\mu,\ \frac{-(\nu+n)}{r}\right)\right].$$

Wir können nun setzen:

$$-\mu_\alpha = \mu_\alpha + p_\alpha, \quad \frac{-\nu_\alpha - n_\alpha}{r} = \frac{\nu_\alpha + n'_\alpha}{r} + q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2 \cdot\cdot \varrho),$$

wo $p_1 \cdot\cdot p_\varrho$, $q_1 \cdot\cdot q_\varrho$ ganze Zahlen, und $(n_1' \cdot\cdot n_\varrho')$ ein bestimmtes zu $(n_1 \cdot\cdot n_\varrho)$ conjugirtes System von Zahlen ist, deren jede einen der Werthe $0, 1, 2 \cdot\cdot r-1$ hat. Es ist dann nach Formel (7):

$$\Theta^r\left(u_1 \cdot\cdot u_\varrho;\ -\mu,\ \frac{-\nu-n}{r}\right) = e^{2\pi i \Sigma p_\alpha \left(\frac{\nu_\alpha + n'_\alpha}{r}\right)}\, \Theta\left(u_1 \cdot\cdot u_\varrho;\ \mu,\ \frac{\nu+n'}{r}\right).$$

Daher erhalten wir:

$$\Pi(u_1 \cdot\cdot u_\varrho) = r^{-\varrho} \sum \left[\varkappa (n_1 \cdot\cdot n_\varrho)\, e^{-4\pi i \Sigma \mu_\alpha \left(\frac{n'_\alpha + \nu'_\alpha}{r}\right)}\, \Theta\left(u_1 \cdot\cdot u_\varrho;\ \mu,\ \frac{\nu+n'}{r}\right)\right].$$

Diese Formel muss mit der ursprünglichen identisch sein; daraus ergiebt sich:

$$(21) \qquad (n_1' \cdot\cdot n_\varrho') = \varkappa (n_1 \cdot\cdot n_\varrho)\, e^{-4\pi i \Sigma \frac{\mu_\alpha (n'_\alpha + \nu_\alpha)}{r}}.$$

Die Systeme (n) und (n') sind verbunden durch die ϱ Congruenzen:

$$n_\alpha + n_\alpha' + 2\nu_\alpha \equiv 0 \bmod r.$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder das System (n') fällt zusammen mit dem System (n). Diese sich selbst conjugirten Systeme bezeichnen wir durch (a). Für dieselben ist

$$2a_\alpha + 2\nu_\alpha \equiv 0 \bmod r.$$

Oder es fällt (n) nicht mit (n') zusammen. Diese paarweise vorkommenden Systeme bezeichnen wir durch (b) und (b'); es ist dann:

$$(22) \qquad r^\varrho \Pi(u_1 \cdots u_\varrho) = \sum_{(a)} \left[(a_1 \cdots a_\varrho)\, \Theta^r\left(u_1 \cdots u_\varrho;\ \mu,\ \frac{v+a}{r}\right)\right]$$

$$+ \sum_{(b)} \left[(b_1 \cdots b_\varrho) \left\{ \Theta^r\left(u_1 \cdots u_\varrho;\ \mu,\ \frac{v+b}{r}\right) + \varkappa \Theta^r\left(u_1 \cdots u_\varrho;\ -\mu,\ -\frac{v-b}{r}\right)\right\}\right].$$

Bezeichnen wir mit α die Anzahl der Systeme (a), so ist die Anzahl der Glieder in der zweiten Summe $= \frac{r^\varrho - \alpha}{2}$. Die Coefficienten $(a_1 \cdots a_\varrho)$ sind, wie aus (21) hervorgeht, nur dann von 0 verschieden, wenn

$$e^{4\pi i \sum \frac{\mu_\alpha (a_\alpha + \nu_\alpha)}{r}} = \varkappa$$

ist. Es sind jetzt verschiedene Fälle zu unterscheiden:

I. Es sei r grade und alle Grössen μ_α, ν_α gleich Null. Dann sind die Systeme (a) bestimmt durch die Congruenzen

$$2 a_\alpha \equiv 0 \bmod r.$$

Es kann also $a_\alpha = 0$, und $a_\alpha = \frac{r}{2}$ gesetzt werden. Die Anzahl α der Systeme a ist demnach $= 2^\varrho$. Es ist aber

$$e^{4\pi i \sum \frac{\mu_\alpha (a_\alpha + \nu_\alpha)}{r}} = 1;$$

folglich $(a_1 \cdots a_\varrho) = 0$, wenn $\varkappa = -1$. Daraus ergiebt sich, dass die Anzahl m der Functionen, durch welche $\Pi(u_1 \cdots u_\varrho)$ dargestellt ist, $= \frac{r^\varrho - 2^\varrho}{2}$ ist, wenn Π eine ungrade, und $= \frac{r^\varrho + 2^\varrho}{2}$, wenn Π eine grade Function ist.

II. Es sei r grade, und nicht alle Grössen μ_α, $\nu_\alpha = 0$. Dann sind die Congruenzen

$$2 a_\alpha + 2 \nu_\alpha \equiv 0 \bmod r$$

unlösbar; es ist also $\alpha = 0$, und daher $m = \frac{r^\varrho}{2}$.

III. Es sei r ungrade.
Dann erlauben die Congruenzen

$$2 a_\alpha + 2 \nu_\alpha \equiv 0 \bmod r$$

eine einzige Lösung; nämlich

$$a_\alpha = 0 \text{ wenn } \nu_\alpha = 0,$$

$$a_\alpha = \frac{r-1}{2} \text{ wenn } \nu_\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

In jedem Falle ist also

$$a_\alpha + \nu_\alpha = r \nu_\alpha,$$

folglich

$$e^{4\pi i \sum \frac{\mu_\alpha (a_\alpha + \nu_\alpha)}{r}} = (-1)^{\sum 4 \mu_\alpha \nu_\alpha}.$$

Es ist also $m = \frac{r^\varrho + 1}{2}$, wenn $\varkappa (-1)^{\Sigma 4 \mu_\alpha \nu_\alpha} = +1$, und $m = \frac{r^\varrho - 1}{2}$, wenn $\varkappa (-1)^{\Sigma 4 \mu_\alpha \nu_\alpha} = -1$ ist.

§ 4.

Wir haben gesehen, dass nur solche Theta-Functionen grade oder ungrade sein können, deren Charakteristik durch rationale Zahlen mit dem Nenner 2 gebildet wird. Gleichzeitig geht aus der Definition in § 2 hervor, dass die Charakteristik nicht geändert wird, wenn wir jede der Grössen, aus denen sie besteht, um eine ganze Zahl vermehren. Wir setzen deshalb:

$$\mu_\alpha = \tfrac{1}{2}\delta_\alpha, \quad \nu_\alpha = \tfrac{1}{2}\varepsilon_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2 \cdots \varrho),$$

und setzen fest, dass jede dieser Grössen δ, ε den Werth 0 oder 1 haben soll. Es ist dann:

$$\Theta(-u_1 \cdots - u_\varrho, \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2}\varepsilon) = \Theta(u_1 \cdots u_\varrho; \tfrac{1}{2}\delta - \delta, \tfrac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon).$$

Dies ist aber, der Formel (7) zufolge,

$$= (-1)^{\Sigma \varepsilon_\alpha \delta_\alpha} \Theta(u_1 \cdots u_\varrho; \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Mithin ist $\Theta(u_1 \cdots u_\varrho; \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\varepsilon)$ eine grade oder ungrade Function, je nachdem $\Sigma \varepsilon_\alpha \delta_\alpha$ eine grade oder ungrade Zahl ist. Demnach unterscheiden wir grade und ungrade Charakteristiken. Jede dieser 4^ϱ Charakteristiken bezeichnen wir durch einen Index; speciell diejenige, in der die sämmtlichen Grössen δ, ε gleich Null sind, durch den Index 0.

Greift man eine Reihe von Indices: $a, b \cdots e$ willkürlich heraus, so giebt es einen bestimmten Index m von der Beschaffenheit, dass

$$\delta_\alpha^a + \delta_\alpha^b + \cdots + \delta_\alpha^e \equiv \delta_\alpha^m \bmod 2,$$
$$\varepsilon_\alpha^a + \varepsilon_\alpha^b + \cdots + \varepsilon_\alpha^e \equiv \varepsilon_\alpha^m \bmod 2.$$

Wir sagen dann: der Index m entsteht durch Zusammensetzung von $a, b \cdots e$ und bezeichnen dies dadurch, dass wir setzen: $m = a\,b \cdots e$. Die Reihenfolge der Zusammensetzung ist hiernach gleichgültig; ferner ist klar, dass zwei gleiche Indices sich in der Zusammensetzung aufheben, und dass eine Zusammensetzung mit dem Index 0 keine Aenderung hervorbringt. Demnach ist $ab = ba$, $abb = a$, $0a = a$.

Zu jedem Index a gehört ein bestimmtes System halber Perioden:

$$\omega_\alpha^a = \sum_\beta \left(\delta_\alpha^a \omega_{\alpha\beta} + \varepsilon_\alpha^a \omega'_{\alpha\beta}\right), \quad \eta_\alpha^a = \sum_\beta \left(\delta_\alpha^a \eta_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha^a \eta'_{\alpha\beta}\right).$$

Die Function

$$\eta(u_1 \cdots u_\varrho; \tfrac{1}{2}\delta^a, \tfrac{1}{2}\varepsilon^a)$$

werde bezeichnet durch $\eta(u_1 \cdots u_\varrho)_a$. Es folgt dann aus der Gleichung (3′):

$$e^{-\eta(u_1 \cdots u_\varrho)^b}\,\Theta(u_1 + \omega_1^b \cdots;\ \tfrac{1}{2}\delta^a,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^a)$$
$$= e^{-\frac{\pi i}{2}\sum \varepsilon_\alpha^b \delta_\alpha^a}\,\Theta(u \cdots;\ \tfrac{1}{2}\delta^a + \tfrac{1}{2}\delta^b,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^a + \tfrac{1}{2}\varepsilon^b).$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2}\delta_\alpha^a + \tfrac{1}{2}\delta_\alpha^b = \tfrac{1}{2}\delta_\alpha^{ab} + p_\alpha,\quad \tfrac{1}{2}\varepsilon_\alpha^a + \tfrac{1}{2}\varepsilon_\alpha^b = \tfrac{1}{2}\varepsilon_\alpha^{ab} + q_\alpha,$$

wo $p_1 \cdots p_\varrho$, $q_1 \cdots q_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten; demnach ist

$$\Theta(u_1 \cdots;\ \tfrac{1}{2}\delta^a + \tfrac{1}{2}\delta^b,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^a + \tfrac{1}{2}\varepsilon^b) = e^{\frac{\pi i}{2}\sum \varepsilon_\alpha^{ab}\left(\delta_\alpha^a + \delta_\alpha^b - \delta_\alpha^{ab}\right)}\,\Theta(u_1 \cdots;\ \tfrac{1}{2}\delta^{ab},\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}).$$

Daraus geht hervor:

$$(23)\quad e^{-\eta(u_1 \cdots u_\varrho)^b}\,\Theta(u_1 + \omega_1^b \cdots;\ \tfrac{1}{2}\delta^a,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^a) = i^{b;\,a}\,\Theta(u_1 \cdots;\ \tfrac{1}{2}\delta^{ab},\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}),$$

wo $b;\,a$ eine bestimmte von den Indices a, b abhängige Zahl bedeutet, dargestellt durch:

$$(24)\qquad b;\,a = \sum_\alpha \left[-\varepsilon_\alpha^b \delta_\alpha^a + \varepsilon_\alpha^{ab}\left(\delta_\alpha^a + \delta_\alpha^b - \delta_\alpha^{ab}\right)\right].$$

Man erkennt nun leicht, dass es auf mannichfache Weise möglich sein wird, 2ϱ primitive Indices auszuwählen, durch deren sämmtliche Combinationen alle 4^ϱ Indices, mit Ausnahme des Index 0, dargestellt werden können. Am einfachsten bietet sich zunächst dasjenige System dar, welches den primitiven Perioden entspricht. Wir bezeichnen durch den Index a_α diejenige Charakteristik, in der sämmtliche Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho$ gleich Null sind, und ebenso alle Grössen $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_\varrho$, mit Ausnahme von δ_α; ebenso durch b_α diejenige Charakteristik, in der $\varepsilon_\alpha = 1$, alle übrigen Grössen $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_\varrho$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho$ aber gleich Null sind. Es ist dann klar, dass durch die Combinationen dieser 2ϱ Indices der Index 0 nicht, dagegen alle übrigen Indices, und zwar nur auf eine Weise, dargestellt werden können. Zur Vereinfachung führen wir ausser diesen 2ϱ primitiven noch die zusammengesetzten Indices ein:

$$a_1 b_1 = c_1,\quad a_2 b_2 = c_2 \cdots a_\varrho b_\varrho = c_\varrho.$$

Es sei nun m ein beliebiger Index, und zunächst dargestellt durch eine Combination der primitiven $a_1 \cdots a_\varrho$, $b_1 \cdots b_\varrho$. Wenn in diesem Ausdruck a_1 und b_1, oder a_2 und b_2, u. s. f. gleichzeitig vorkommen, so ersetzen wir diese Paare durch c_1, c_2 u. s. f. Dadurch erhalten wir einen Ausdruck, der aus höchstens ϱ Gliedern besteht, und das Kriterium, ob m ein grader oder ungrader Index ist, ist offenbar folgendes: m ist grade, wenn die Anzahl der in dem reducirten Ausdruck von m vorkommenden Grössen c eine grade, und ungrade, wenn diese Anzahl ungrade ist. So ist z. B. der Index $a_1 b_1 b_2 = c_1 b_2$ ungrade, $a_1 b_1 c_2 c_3$ dagegen grade. Wir suchen jetzt eine andere Bezeichnungsweise, bei der die graden und ungraden Indices in gesonderten Gruppen auftreten.

Wir nehmen zuerst an, es sei ϱ eine ungrade Zahl, und definiren das folgende System von $2\varrho+1$ Indices:

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 = a_1 c_2 c_3 \cdots c_{\frac{\varrho+1}{2}} & \beta_1 = b_1 c_2 c_3 \cdots c_{\frac{\varrho+1}{2}} \\
\alpha_2 = a_2 c_3 c_4 \cdots c_{\frac{\varrho+3}{2}} & \beta_2 = b_2 c_3 \cdots c_{\frac{\varrho+3}{2}} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{\frac{\varrho+1}{2}} = a_{\frac{\varrho+1}{2}} c_{\frac{\varrho+3}{2}} c_{\frac{\varrho+5}{4}} \cdots c_\varrho & \beta_{\frac{\varrho+1}{2}} = b_{\frac{\varrho+1}{2}} c_{\frac{\varrho+3}{2}} \cdots c_\varrho \\
\alpha_{\frac{\varrho+3}{2}} = a_{\frac{\varrho+3}{2}} c_{\frac{\varrho+5}{2}} \cdots c_1 & \beta_{\frac{\varrho+3}{2}} = b_{\frac{\varrho+3}{2}} c_{\frac{\varrho+5}{2}} \cdots c_1 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\alpha_\varrho = a_\varrho c_1 c_2 \cdots c_{\frac{\varrho-1}{2}} & \beta_\varrho = b_\varrho c_1 c_2 \cdots c_{\frac{\varrho-1}{2}}
\end{array} \tag{25}
$$

$$\gamma = c_1 c_2 c_3 \cdots c_\varrho .$$

Verstehen wir unter $c_{\varrho+\lambda}$ dasselbe wie c_λ, so ist allgemein:

$$
\begin{aligned}
\alpha_\lambda &= a_\lambda c_{\lambda+1} c_{\lambda+2} c_{\lambda+3} \cdots c_{\lambda+\frac{\varrho-1}{2}} \\
\beta_\lambda &= b_\lambda c_{\lambda+1} c_{\lambda+2} c_{\lambda+3} \cdots c_{\lambda+\frac{\varrho-1}{2}} \qquad (\lambda = 1, 2 \cdots \varrho) \\
\gamma &= c_1 c_2 c_3 \cdots c_{\varrho-1} c_\varrho .
\end{aligned}
$$

Diese $2\varrho+1$ Indices sind hier dargestellt in der reducirten Form. Man erkennt daher sofort, dass γ ungrade ist; α_λ und β_λ sind grade oder ungrade, je nachdem $\frac{\varrho-1}{2}$ eine grade oder ungrade Zahl ist; d. h. grade, wenn $\varrho \equiv 1 \bmod 4$, ungrade, wenn $\varrho \equiv 3 \bmod 4$.

Wir bilden jetzt die Combinationen dieser Grössen. Combiniren wir zunächst γ und α_λ, so heben sich die in beiden Indices vorkommenden Grössen $c_{\lambda+1}$, $c_{\lambda+2} \cdots c_{\lambda+\frac{\varrho-1}{2}}$ auf, c_λ verbindet sich mit a_λ zu b_λ. Der reducirte Index $\gamma\alpha_\lambda$ enthält also $\frac{\varrho-1}{2}$ Grössen c. Dasselbe gilt von $\gamma\beta_\lambda$. Mithin sind auch $\gamma\alpha_\lambda$ und $\gamma\beta_\lambda$ grade, wenn $\varrho \equiv 1 \bmod 4$, ungrade, wenn $\varrho \equiv 3 \bmod 4$.

Wir combiniren jetzt zwei verschiedene der Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho$, $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_\varrho$. Zunächst ist offenbar $\alpha_\lambda\beta_\lambda = c_\lambda$ ungrade, und $\gamma\alpha_\lambda\beta_\lambda$ grade. Setzen wir jetzt

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\lambda &= \bar{a}_\lambda c_{\lambda+1} c_{\lambda+2} \cdots c_{\lambda+\frac{\varrho-1}{2}} , \\
\bar{\alpha}_\mu &= \bar{a}_\mu c_{\mu+1} c_{\mu+2} \cdots c_{\mu+\frac{\varrho-1}{2}} .
\end{aligned}
$$

Es soll $\lambda \lesseqgtr \mu$ sein; $\bar{a}_\lambda$ soll sowohl a_λ als b_λ, $\bar{a}_\mu$ sowohl a_μ als b_μ bedeuten können. Es sei

$$\lambda \equiv \mu + \nu \bmod \varrho .$$

Wir können annehmen, dass ν eine Zahl der Reihe $1, 2 \cdots \frac{\varrho-1}{2}$ ist (andernfalls vertauschen wir λ und μ). Dann ist

$$\bar{\alpha}_\mu = \bar{a}_\mu c_{\mu+1} c_{\mu+2} \cdots c_{\mu+\frac{\varrho-1}{2}},$$

$$\bar{\alpha}_{\mu+\nu} = \bar{a}_{\mu+\nu} c_{\mu+\nu+1} \cdots c_{\mu+\nu+\frac{\varrho-1}{2}}.$$

Da die Zahl $\mu+\nu$ in der Reihe $\mu+1 \cdots \mu+\frac{\varrho-1}{2}$ vorkommt, so können wir $\bar{\alpha}_\mu$ zerlegen in

$$\bar{\alpha}_\mu = (\bar{a}_\mu c_{\mu+1} \cdots c_{\mu+\nu-1})(c_{\mu+\nu} c_{\mu+\nu+1} \cdots c_{\mu+\frac{\varrho-1}{2}})$$

$\bar{\alpha}_{\mu+\nu}$ in:

$$\bar{\alpha}_{\mu+\nu} = (\bar{a}_{\mu+\nu} c_{\mu+\nu+1} \cdots c_{\mu+\frac{\varrho-1}{2}}) \cdot (c_{\mu+\frac{\varrho+1}{2}} \cdots c_{\mu+\nu+\frac{\varrho-1}{2}}).$$

Wir erhalten also, da sich $\bar{a}_{\mu+\nu}$ mit $c_{\mu+\nu}$ zu $b_{\mu+\nu}$ ergänzt:

$$\alpha_\mu \bar{\alpha}_{\mu+\nu} = \bar{a}_\mu b_{\mu+\nu} c_{\mu+1} \cdots c_{\mu+\nu-1} c_{\mu+\frac{\varrho+1}{2}} \cdots c_{\mu+\nu+\frac{\varrho-1}{2}}.$$

Dieser Index ist in seiner reducirten Form, und enthält $2\nu-1$ Grössen c. Es ist also $\alpha_\mu \bar{\alpha}_{\mu+\nu}$ ungrade. Bildet man endlich $\gamma \bar{\alpha}_\mu \bar{\alpha}_{\mu+\nu}$, so heben sich diese $2\nu-1$ Grössen c fort, und c_μ, $c_{\mu+\nu}$ ergänzen sich mit $a_\mu \bar{b}_{\mu+\nu}$ zu $\bar{b}_\mu \bar{a}_{\mu+\nu}$. Der reducirte Ausdruck von $\gamma \bar{\alpha}_\mu \bar{\alpha}_{\mu+\nu}$ enthält also $\varrho - (2\nu-1) - 2$ Grössen c; mithin ist $\gamma \bar{\alpha}_\mu \alpha_{\mu+\nu}$ ein grader Index.

Bezeichnen wir jetzt die Indices $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho$, $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_\varrho$ in irgend einer Reihenfolge durch $m_1, m_2 \cdots m_{2\varrho}$, und γ durch m, so ist, wie wir bewiesen haben:

m ungrade. $m_\varkappa m_\lambda$ ungrade. $m m_\varkappa m_\lambda$ grade

$$(\varkappa < \lambda).$$

$m_\varkappa$ und $m m_\varkappa$ grade für $\varrho \equiv 1 \bmod 4$,

ungrade für $\varrho \equiv 3 \bmod 4$.

$m_1, m_2 \cdots m_{2\varrho}$ ist, wie aus (24) hervorgeht, ein vollständiges System primitiver Indices, und

$$m = m_1 m_2 \cdots m_{2\varrho}.$$

Wir bezeichnen nun in dem ersten Fall $\varrho \equiv 1 \bmod 4$

$$m, m_1, m_2 \cdots m_{2\varrho}$$

in irgend einer Reihenfolge durch die Zahlen:

$$1, 2, 3 \cdots 2\varrho+1$$

und setzen ausserdem $m = \varepsilon$. Dann ist

ε ungrade,

$\varepsilon\varkappa$ grade $(\varkappa = 1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1)$,

$\varepsilon\varkappa\lambda$ grade $(\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1;\ \varkappa \leqq \lambda)$.

In dem zweiten Falle $\varrho \equiv 3 \bmod 4$ bezeichnen wir ebenfalls die Indices

$$m, m_1, m_2 \cdot\cdot m_{2\varrho}$$

durch die Zahlen

$$1, 2, 3 \cdot\cdot 2\varrho + 1,$$

setzen aber $\varepsilon = 0$. Dann ist

ε grade,

$\varepsilon\varkappa$ ungrade $(\varkappa = 1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1)$,

$\varepsilon\varkappa\lambda$ ungrade $(\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1;\ \varkappa \leqq \lambda)$.

Nehmen wir jetzt an, dass ϱ eine grade Zahl ist; dann setzen wir $\varrho = \varrho' + 1$ und bilden aus $a_1, a_2 \cdot\cdot a_{\varrho'}$, $b_1, b_2 \cdot\cdot b_{\varrho'}$ die Grössen $m, m_1, m_2 \cdot\cdot m_{2\varrho'}$. Wir haben jetzt wieder die Fälle zu unterscheiden: $\varrho \equiv 2 \bmod 4$, und $\varrho \equiv 0 \bmod 4$; oder $\varrho' \equiv 1 \bmod 4$ und $\varrho' \equiv 3 \bmod 4$.

Im ersten Falle $\varrho \equiv 2 \bmod 4$ bezeichnen wir mit

$$1, 2, 3 \cdot\cdot 2\varrho + 1$$

die Indices

$$m_1, m_2 \cdot\cdot m_{2\varrho'};\quad ma_\varrho, mb_\varrho, mc_\varrho,$$

und setzen ausserdem

$$c_\varrho = \varepsilon.$$

Dann ist ε ungrade. $\varepsilon\varkappa$ ist ebenfalls ungrade für $\varkappa = 1, 2 \,..\, 2\varrho + 1$. Denn da $m_\varkappa$ grade ist, und weder a_ϱ, noch b_ϱ, noch c_ϱ enthält, so ist $c_\varrho m_\varkappa$ ungrade; ferner, da m ungrade ist, und a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ nicht enthält, so ist auch $c_\varrho m a_\varrho = m b_\varrho$, $c_\varrho m b_\varrho = m a_\varrho$, $c_\varrho m c_\varrho = m$ ungrade. Ferner ist $\varepsilon\varkappa\lambda$ stets grade. Denn da $m_\varkappa m_\lambda$ ungrade ist, so ist $c_\varrho m_\varkappa m_\lambda$ grade; da $m m_\varkappa$ grade ist, so sind auch $c_\varrho m a_\varrho m_\varkappa = b_\varrho m m_\varkappa$, $c_\varrho m b_\varrho m_\varkappa = a_\varrho m m_\varkappa$, und $c_\varrho m c_\varrho m_\varkappa = m m_\varkappa$ grade. Endlich ist $c_\varrho m a_\varrho m b_\varrho = 0$, $c_\varrho m a_\varrho m c_\varrho = b_\varrho$, $c_\varrho m b_\varrho m c_\varrho = a_\varrho$; also auch diese Indices sind grade. Demnach ist für diesen Fall:

ε ungrade,

$\varepsilon\varkappa$ ungrade $(\varkappa = 1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1)$,

$\varepsilon\varkappa\lambda$ grade $(\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1;\ \varkappa \leqq \lambda)$.

Es bleibt noch der Fall übrig: $\varrho \equiv 0$ oder $\varrho' \equiv 3 \bmod 4$. In diesem setzen wir $\varepsilon = 0$, und bezeichnen mit $1, 2 \cdot\cdot 2\varrho + 1$ die Indices:

$$c_\varrho m, c_\varrho m_1, c_\varrho m_2 \cdot\cdot c_\varrho m_{2\varrho'};\ a_\varrho, b_\varrho.$$

Diese sind sämmtlich grade, da $m, m_1 \cdot\cdot m_{2\varrho'}$ ungrade sind. Die Combinationen je zweier verschiedenen sind aber ungrade. Denn erstens

ist offenbar $a_\varrho b_\varrho = c_\varrho$ ungrade. Wenn wir zweitens a_ϱ und b_ϱ mit den übrigen combiniren, so erhalten wir

$$b_\varrho m,\ b_\varrho m_1 \text{ etc.}; \qquad a_\varrho m,\ a_\varrho m_1 \text{ etc.}$$

Diese sind ungrade, da m, m_1 etc. ungerade sind. Combiniren wir drittens die Grössen $c_\varrho m, c_\varrho m_1 \cdots c_\varrho m_{2\varrho}$ unter einander, so erhalten wir:

$$m m_1,\ m m_2, \text{ etc.} \qquad m_1 m_2,\ m_1 m_3,\ m_2 m_3 \cdots$$

Dass diese ungrade sind, haben wir schon bei Erörterung des Falles $\varrho \equiv 3 \bmod 4$ gesehen. Wir erhalten also:

ε grade,

$\varepsilon\varkappa$ grade ($\varkappa = 1, 2 \cdots 2\varrho + 1$),

$\varepsilon\varkappa\lambda$ ungrade ($\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots 2\varrho + 1;\ \varkappa \lesseqgtr \lambda$).

Wir bezeichnen jetzt, wenn n ein beliebiger Index ist, mit $[n]$ eine Grösse, welche $= 0$ oder 1 ist, je nachdem n ein grader oder ungrader Index ist. Diese Grösse wird dargestellt durch die Summe:

$$[n] \equiv \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left(\varepsilon_\alpha^n \delta_\alpha^n\right) \bmod 2.$$

Es handelt sich jetzt darum, wenn a ein Index ist, der durch eine bestimmte Anzahl k von einander verschiedener Indices der Reihe $1, 2 \cdots 2\varrho + 1$ ausgedrückt ist, den Werth von $[\varepsilon a]$ zu finden. Hierzu ist ein Hülfssatz nöthig.

Es seien l, m, n drei beliebige Indices; dann ist

$$[lmn] \equiv \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left[\varepsilon_\alpha^{lmn} \delta_\alpha^{lmn}\right] \bmod 2,$$

oder, da

$$\varepsilon_\alpha^{lmn} \equiv \varepsilon_\alpha^l + \varepsilon_\alpha^m + \varepsilon_\alpha^n \bmod 2,$$

$$\delta_\alpha^{lmn} \equiv \delta_\alpha^l + \delta_\alpha^m + \delta_\alpha^n \bmod 2,$$

$$[lmn] = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left[\left(\varepsilon_\alpha^n + \varepsilon_\alpha^m + \varepsilon_\alpha^n\right)\left(\delta_\alpha^l + \delta_\alpha^m + \delta_\alpha^n\right)\right].$$

Diese Summe kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left[\left(\varepsilon_\alpha^m + \varepsilon_\alpha^n\right)\left(\delta_\alpha^m + \delta_\alpha^n\right) + \left(\varepsilon_\alpha^n + \varepsilon_\alpha^l\right)\left(\delta_\alpha^n + \delta_\alpha^l\right) + \left(\varepsilon_\alpha^l + \varepsilon_\alpha^m\right)\left(\delta_\alpha^l + \delta_\alpha^m\right)\right]$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left[\varepsilon_\alpha^l \delta^l + \varepsilon_\alpha^m \delta_\alpha^m + \varepsilon_\alpha^n \delta_\alpha^n\right].$$

Mithin ist

$$[lmn] \equiv [mn] + [nl] + [lm] + [l] + [m] + [n] \bmod 2.$$

Es sei nun a ein Index, der durch eine Combination von k verschiedenen Indices der Reihe $1, 2 \cdots 2\varrho + 1$ entsteht. Zwei dieser in a vorkommenden Indices seien $\varkappa$, λ; dann ist $a = \varkappa\lambda a'$, wo a' zwei Indices weniger enthält. Es ist nun, wenn man in der letzten Formel $l = \varepsilon a'$, $m = \varkappa$, $n = \lambda$ setzt:

$$[\varepsilon a'\varkappa\lambda] \equiv [\varepsilon a'\varkappa] + [\varepsilon a'\lambda] + (\varkappa\lambda) + [\varepsilon a'] + [\varkappa] + [\lambda].$$

Gleichzeitig ist aber

$$[\varepsilon\varkappa\lambda] \equiv [\varepsilon\varkappa] + [\varepsilon\lambda] + [\varkappa\lambda] + [\varepsilon] + [\varkappa] + [\lambda].$$

Mithin

$$[\varepsilon a'\varkappa\lambda] \equiv [\varepsilon a'\varkappa] + [\varepsilon a'\lambda] + [\varepsilon a'] + [\varepsilon\varkappa\lambda] + [\varepsilon\varkappa] + [\varepsilon\lambda] + [\varepsilon].$$

Nun ist in allen vier Fällen $\varepsilon\varkappa\lambda$ grade, wenn ε ungrade ist, und umgekehrt; ferner $\varepsilon\varkappa$, $\varepsilon\lambda$ gleichzeitig grade oder ungrade; daher ist

$$[\varepsilon\varkappa\lambda] + [\varepsilon\varkappa] + [\varepsilon\lambda] + [\varepsilon] \equiv 1 \bmod 2;$$

mithin

$$[\varepsilon a'\varkappa\lambda] \equiv [\varepsilon a'\varkappa] + [\varepsilon a'\lambda] + [\varepsilon a'] + 1.$$

Wenn wir nun bewiesen haben, dass für alle Combinationen a' von der Ordnung $k - 2$, $[\varepsilon a']$ denselben Werth hat, und dass dasselbe gilt für alle Combinationen $a'\varkappa$, $a'\lambda$ etc. von der Ordnung $k - 1$, so geht aus dieser Formel hervor, dass auch für alle Combinationen a von der Ordnung k $[\varepsilon a]$ denselben Werth hat; und zwar ist dieser Werth entgegengesetzt dem von $[\varepsilon a']$. Es hat also, wenn $\varkappa$, λ, μ, ν etc. irgend welche verschiedene Indices der Reihe

$$1, 2, \cdots 2\varrho + 1$$

sind, $[\varepsilon\varkappa\lambda\mu]$ den entgegengesetzten Werth von $[\varepsilon\varkappa]$, $[\varepsilon\varkappa\lambda\mu\nu]$ den entgegengesetzten Werth von $[\varepsilon\varkappa\lambda]$ und denselben wie $[\varepsilon]$, u. s. f. Mit Hülfe dieses Resultats ergiebt nun die Betrachtung der vier verschiedenen Fälle, dass εa ein grader Index ist, wenn a durch eine Combination von ϱ oder $\varrho + 1$ verschiedenen primitiven Indices entsteht. Daraus geht sofort hervor, dass εa ein grader Index ist, wenn die Anzahl k der Glieder, aus denen a besteht, $\equiv \varrho$ oder $\equiv \varrho + 1 \bmod 4$ ist, dagegen ein ungrader, wenn $k \equiv \varrho - 1$ oder $\equiv \varrho + 2 \bmod 4$ ist. Somit ist folgender Satz bewiesen:

II. *Es ist möglich, ein System primitiver Indices*

$$1, 2, 3 \cdots 2\varrho + 1$$

und einen ausgezeichneten ε so zu wählen, dass εa ein grader Index ist, wenn die Anzahl der primitiven Indices, aus denen a zusammengesetzt ist, $\equiv \varrho$ oder $\equiv \varrho + 1$ mod 4 ist, dagegen ein ungrader, wenn diese Anzahl $\equiv \varrho + 2$ oder $\equiv \varrho - 1$ mod 4 ist.

Durch die Combination aller primitiven Indices geht, wie alle vier Fälle zeigen, der Index 0 hervor. Demnach kann jeder Index auf zwei-

fache Weise in der Form εa dargestellt werden: $m = \varepsilon a$, und $m = \varepsilon a'$. In a und a' zusammen sind dann alle $2\varrho + 1$ Indices enthalten; daher enthält die eine Combination stets weniger als $\varrho + 1$, die andere stets mehr als ϱ Glieder, die eine Combination eine grade Anzahl, die andere eine ungrade.

§ 5.

Wir wählen für $\varrho = 3$ ein System primitiver Indices

$$1, 2, 3 \ldots 7$$

in der Art, wie im vorigen § angegeben wurde, indem wir $\varepsilon = 0$ annehmen (diese Indices bezeichnen wir zum Unterschiede von den allgemeinen durch griechische Buchstaben). Es lassen sich dann alle 64 Indices durch die 64 Combinationen $0, \varkappa, \varkappa\lambda, \varkappa\lambda\mu$ darstellen, und zwar sind durch die 28 Combinationen $\varkappa$ und $\varkappa\lambda$ die ungraden, durch die 36 Combinationen 0 und $\varkappa\lambda\mu$ die graden dargestellt. Indessen kann auch jeder Index durch eine höhere Combination ausgedrückt werden; es ist nämlich, wenn

$$\varkappa, \lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$$

die Indices $1, 2 \cdot \cdot 7$ in irgend einer Reihenfolge bedeuten:

$$0 = \varkappa\lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta, \quad \varkappa = \lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta, \quad \varkappa\lambda = \mu\alpha\beta\gamma\delta, \quad \varkappa\lambda\mu = \alpha\beta\gamma\delta.$$

Es seien jetzt u, u', u'' drei unabhängige Veränderliche, v, v', v'' und w, w', w'' zwei constante Werthsysteme derselben, und k, l, m drei beliebige Indices. Alsdann erhalten wir, wenn wir in dem Ausdruck

$$\Theta(u+v, u'+v', u''+v''; \tfrac{1}{2}\delta^{k\alpha}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{k\alpha})\ \Theta(u-v, u'-v', u''-v''; \tfrac{1}{2}\delta^{l\alpha}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{l\alpha})$$

$\alpha = 0, 1, 2 \cdot \cdot 7$ setzen, 8 Theta-Functionen zweiten Grades mit der Charakteristik $(\frac{1}{2}\delta^{kl}, \frac{1}{2}\varepsilon^{kl})$. Eine ebensolche Function ist

$$\Theta(u+w, u'+w', u''+w''; \tfrac{1}{2}\delta^{km}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{km})\,\Theta(u-w, u'-w', u''-w''; \tfrac{1}{2}\delta^{lm}, \varepsilon^{lm}).$$

Zwischen diesen $2^\varrho + 1$ Ausdrücken muss, dem Satz (I.) zufolge, eine lineare homogene Gleichung bestehen:

$$f\Theta(u + w \cdot \cdot; \tfrac{1}{2}\delta^{km}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{km})\ \Theta(u - w \cdot \cdot; \tfrac{1}{2}\delta^{lm}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{lm})$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{7} [f_\alpha\, \Theta(u + v \cdot \cdot; \tfrac{1}{2}\delta^{k\alpha}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{k\alpha})\ \Theta(u - v \cdot \cdot; \tfrac{1}{2}\delta^{l\alpha}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{l\alpha})],$$

deren Coefficienten $f, f_0, f_1 \cdot \cdot f_7$ von u, u', u'' unabhängig sind. Um diese zu bestimmen, verfahren wir so:

Es sei β irgend einer der Indices $0, 1, 2 \cdot \cdot 7$. Wir vermehren dann die Variabeln um dasjenige halbe Periodensystem, welches zu dem Index $l\beta$ gehört. Multipliciren wir dann noch die gefundene Gleichung mit dem Factor

$$e^{-2\eta(u_1 \cdot \cdot)l\beta},$$

so ergiebt sich, vermöge Formel (23):

$$i^{l\beta;\,km+l\beta;\,lm} f\Theta(u+w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{klm\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{klm\beta})\,\Theta(u-w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{m\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{m\beta})$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{7}[i^{l\beta;\,k\alpha+l\beta;\,l\alpha} f_\alpha\Theta(u+v\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{kl\alpha\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{kl\alpha\beta})\,\Theta(u-v\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{\alpha\beta};\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta})].$$

Jetzt setzen wir $u=v$, $u'=v'$, $u''=v''$; dann verwandelt sich die rechte Seite dieser Gleichung in:

$$\sum_{\alpha=0}^{7}[i^{l\beta;\,k\alpha+l\beta;\,l\alpha} f_\alpha\Theta(2v,2v',2v'';\tfrac{1}{2}\delta^{kl\alpha\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{kl\alpha\beta})\,\Theta(0,0,0;\tfrac{1}{2}\delta^{\alpha\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta})].$$

Es ist aber $\alpha\beta$ ein ungrader Index, wenn nicht $\alpha=\beta$ ist; daher:

$$\Theta(0,0,0;\tfrac{1}{2}\delta^{\alpha\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta})=\begin{cases}0, \text{ wenn } \alpha\lesseqgtr\beta,\\ \Theta(0,0,0;0,0) \text{ wenn } \alpha=\beta.\end{cases}$$

Wir erhalten daher, wenn wir die Constante

$$\Theta(0,0,0;0,0) \text{ mit } c_0$$

bezeichnen:

$$i^{l\beta;\,km+l\beta;\,lm-l\beta;\,k\beta-l\beta;\,l\beta} f\Theta(v+w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{klm\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{klm\beta})\,\Theta(v-w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{m\beta},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{m\beta})$$
$$=f_\beta c_0\,\Theta(2v,2v',2v'';\tfrac{1}{2}\delta^{kl},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{kl}).$$

Hierdurch sind die Coefficienten bestimmt, und es ergiebt sich die Gleichung:

$$(26)\quad c_0\Theta(2v\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{kl},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{kl})\,\Theta(u+w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{km},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{km})\,\Theta(u-w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{lm},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{lm})$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{7}[i^{[k\alpha,\,l\alpha,\,m\alpha]}\,\Theta(v+w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{klm\alpha},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{klm\alpha})\,\Theta(v-w\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{m\alpha},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{m\alpha})$$
$$\times\Theta(u+v\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{k\alpha},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{k\alpha})\,\Theta(u-v\cdots;\tfrac{1}{2}\delta^{l\alpha},\tfrac{1}{2}\varepsilon^{l\alpha})],$$

wo

$$[k,l,m]=l;\,km+l;\,lm-l;\,k-l;\,l$$

ist. Es ist nun zufolge (24):

$$l;\,km=\sum[-\varepsilon^l\delta^{km}+\varepsilon^{klm}(\delta^l+\delta^{km}-\delta^{klm})],$$
$$l;\,lm=\sum[-\varepsilon^l\delta^{lm}+\varepsilon^m(\delta^l+\delta^{lm}-\delta^m)],$$
$$l;\,k=\sum[-\varepsilon^l\delta^k+\varepsilon^{kl}(\delta^l+\delta^k-\delta^{kl})],$$
$$l;\,l=\sum[-\varepsilon^l\delta^l].$$

Daraus ergiebt sich:

$$(27)\quad [k,l,m]=\sum[\varepsilon^l(-\delta^{km}-\delta^{lm}+\delta^k+\delta^l)+\varepsilon^{klm}(\delta^l+\delta^{km}-\delta^{klm})$$
$$+\varepsilon^m(\delta^l+\delta^{lm}-\delta^m)-\varepsilon^{kl}(\delta^l+\delta^k-\delta^{kl})].$$

In diesem Ausdruck ist jedes ε mit einer graden Zahl multiplicirt. Da wir nun $[k,l,m]$ nur modulo 4 zu betrachten haben, so können wir ε^l, ε^{klm}, ε^m, ε^{kl} ersetzen durch andere Werthe, die ihnen modulo 2 congruent sind.

Wir denken uns die drei Indices k, l, m dargestellt durch Combinationen von einander verschiedener primitiver Indices:

$$(28) \qquad k = \varkappa_1 \varkappa_2 \cdot \cdot, \quad l = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \cdot, \quad m = \mu_1 \mu_2 \cdot \cdot,$$

und zwar wählen wir, da dies auf zweifache Weise geschehen kann, stets diejenige Darstellung, die aus einer graden Anzahl von Gliedern besteht. Es sei nun n der Complex derjenigen primitiven Indices, die in allen drei Ausdrücken von k, l, m gleichzeitig enthalten sind. Alsdann können wir setzen:

$$k = nk', \quad l = nl', \quad m = nm';$$

und es giebt jetzt keinen primitiven Index, der in k', l', m' gleichzeitig enthalten wäre. Es sei ferner p der Complex derjenigen Indices, die in l' und m' gleichzeitig enthalten sind; q derer, die in m' und k', r derjenigen, die in k' und l' gleichzeitig vorkommen. Dadurch dass wir diese absondern, zerfällt jeder der drei Ausdrücke (28) in vier Theile

$$(29) \qquad k = nqrs, \quad l = nrpt, \quad m = npqu.$$

n, p, q, r, s, t, u sind dann sieben verschiedene Complexe, und so beschaffen, dass ein primitiver Index, der in einem derselben vorkommt, in keinem der übrigen enthalten ist. Wenn wir jetzt die Indices k, l, m zusammensetzen, so erhalten wir:

$$(30) \qquad lm = qrtu, \; mk = rpus, \; kl = pqst, \; klm = nstu.$$

Diese Indices sind hierdurch gleichfalls dargestellt als Combinationen von einander verschiedener primitiver Indices, und zwar müssen diese Darstellungen, da immer eine grade Anzahl von Gliedern fortgefallen ist, wiederum jede aus einer graden Anzahl von Gliedern bestehen. Wir führen jetzt folgende Definition ein:

Es sei k ein beliebiger Index. Diesen stellen wir dar durch eine grade Anzahl von einander verschiedener primitiver Indices (was nur auf eine Weise möglich ist), und bezeichnen durch σ^k die Summe:

$$\sigma^k = \sigma^{\varkappa_1} + \sigma^{\varkappa_2} + \text{etc.},$$

ausgedehnt über alle Indices $\varkappa_1, \varkappa_2$, etc., die in dem Ausdruck von k enthalten sind. Da nun offenbar $\sigma^k \equiv \varepsilon^k \bmod 2$, so können wir in dem Ausdruck (27) die Grössen ε durch diese σ ersetzen. Indem wir dann diejenigen Glieder zusammenfassen, die mit derselben Grösse δ multiplicirt sind, erhalten wir:

$$(31) \quad [k, l, m] \equiv \sum [-\delta^k(\sigma^{kl} - \sigma^l) - \delta^l(\sigma^{kl} - \sigma^l - \sigma^{klm} - \sigma^m) - \delta^m \sigma^m + \delta^{lm}(\sigma^m - \sigma^l) + \delta^{km}(\sigma^{klm} - \sigma^l) + \delta^{kl}\sigma^{kl} - \delta^{klm}\sigma^{klm}] \bmod 4.$$

Da nun die in l enthaltenen primitiven Indices in vier Gruppen n, r, p, t zerfallen, so zerfällt die über diese Indices ausgedehnte Summe in

vier Partialsummen, die diesen Gruppen entsprechen: N, R, P, T. Es ist also

$$\sigma^{kl} = P + Q + S + T,$$
$$\sigma^{l} = N + R + P + T.$$

Folglich

$$\sigma^{kl} - \sigma^{l} = Q + S - N - R.$$

Da aber

$$Q + S + N + R = \sigma^{k}$$

ist, so folgt:

$$\sigma^{kl} - \sigma^{l} = \sigma^{k} - 2\,(N + R).$$

Nun ist aber

$$N + R \equiv \varepsilon^{n} + \varepsilon^{r} \equiv \varepsilon^{nr} \bmod 2;$$

mithin ergiebt sich:

$$\sigma^{kl} - \sigma^{l} \equiv \sigma^{k} + 2\,\varepsilon^{nr} \bmod 4.$$

Auf dieselbe Weise finden wir:

$$\sigma^{kl} - \sigma^{l} - \sigma^{klm} - \sigma^{m} \equiv \sigma^{p} + 2\,\varepsilon^{rptu} \bmod 4,$$
$$\sigma^{m} - \sigma^{l} \equiv \sigma^{lm} + 2\,\varepsilon^{rt} \bmod 4,$$
$$\sigma^{klm} - \sigma^{l} \equiv \sigma^{km} + 2\,\varepsilon^{rp} \bmod 4.$$

Setzen wir diese vier Ausdrücke in die Gleichung (31) ein, so zerfällt der Ausdruck auf der rechten Seite in zwei Theile:

(32) $$[k, l, m] \equiv [(k, l, m)] + 2\,(k, l, m) \bmod 4,$$

von denen der erste

$$[(k, l, m)] \quad \sum[\ \delta^{k}\sigma^{k} \quad \delta^{l}\sigma^{l} \quad \delta^{lm}\sigma^{m} + \delta^{lm}\sigma^{lm} + \delta^{mk}\sigma^{mk} + \delta^{kl}\sigma^{kl} \quad \delta^{klm}\sigma^{klm}]$$

ist, während

$$(k, l, m) = \sum[\varepsilon^{nr}\delta^{k} + \varepsilon^{rptu}\,\delta^{l} + \varepsilon^{rt}\delta^{lm} + \varepsilon^{rp}\delta^{km}].$$

In dem ersten Ausdruck führen wir die Bezeichnung ein:

(33) $$\Sigma\,[\delta^{k}\sigma^{k}] = (k).$$

Dann ist

(34) $$[(k, l, m)] = -(k) - (l) - (m) + (lm) + (mk) + (kl) - (klm).$$

Den zweiten Ausdruck brauchen wir nur modulo 2 zu betrachten. Wir können deshalb δ^{km} ersetzen durch $\delta^{k} + \delta^{m}$, δ^{lm} durch $\delta^{l} + \delta^{m}$. So erhalten wir:

$$(k, l, m) \equiv \sum[(\varepsilon^{nr} + \varepsilon^{rp})\,\delta^{k} + (\varepsilon^{rptu} + \varepsilon^{rt})\,\delta^{l} + (\varepsilon^{rt} + \varepsilon^{rp})\,\delta^{m}] \bmod 2.$$

Nun ist

$$\varepsilon^{nr} + \varepsilon^{rp} \equiv \varepsilon^{np}, \quad \varepsilon^{rptu} + \varepsilon^{rt} \equiv \varepsilon^{pu}, \quad \varepsilon^{rt} + \varepsilon^{rp} \equiv \varepsilon^{pt} \bmod 2.$$

Folglich:

$$(k, l, m) \equiv \sum[\varepsilon^{np}\delta^{k} + \varepsilon^{pu}\delta^{l} + \varepsilon^{pt}\delta^{m}] \bmod 2.$$

Wir setzen jetzt

$$np = K, \quad nq = L, \quad nr = M.$$

Dann bedeutet K den grössten gemeinsamen Theiler der Ausdrücke von l und m, L von m und k, M von k und l. Es ist dann

$$pu = Lm, \; pt = lM;$$

mithin

$$(k, l, m) \equiv \sum [\varepsilon^K \delta^k + \varepsilon^{Lm} \delta^l + \varepsilon^{Ml} \delta^m] \bmod 2.$$

Wir führen auch hier eine abkürzende Bezeichnung ein, die in der Folge beibehalten werden wird. Es seien a, b zwei beliebige Indices; dann setzen wir:

$$\sum [\varepsilon^a \delta^b] \equiv a \mid b \bmod 2. \tag{35}$$

Dieses Zeichen ist also nur modulo 2 definirt. Danach ist:

$$(k, l, m) \equiv K \mid k + Lm \mid l + Ml \mid m \bmod 2. \tag{36}$$

Wir haben somit gefunden:

$$i^{[k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha]} = \frac{i^{-(k\alpha)} i^{-(l\alpha)} i^{-(m\alpha)} i^{-(klm\alpha)}}{i^{-(kl)} i^{-(km)} i^{-(lm)}} (-1)^{(k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha)}. \tag{37}$$

Diesen Ausdruck führen wir in die Gleichung (26) ein, setzen aber vorher folgende Definition fest: Es sei a ein beliebiger Index; dann bezeichnen wir mit $\Theta(u, u', u'')_a$ die Function

$$i^{-(a)}\, \Theta(u, u', u'', \tfrac{1}{2}\delta^a, \tfrac{1}{2}\varepsilon^a) = \Theta(u, u', u'')_a.$$

Alsdann nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$c_0\, \Theta(2v \cdot\cdot)_{kl}\, \Theta(u + w \cdot\cdot)_{km}\, \Theta(u - w \cdot\cdot)_{lm} \tag{39}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{7} [(-1)^{(k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha)} \Theta(v + w \cdot\cdot)_{klm\alpha}\, \Theta(v - w \cdot\cdot)_{m\alpha}\, \Theta(u + v \cdot\cdot)_{k\alpha}\, \Theta(u - v \cdot\cdot)_{l\alpha}].$$

Dies ist das Additionstheorem der Theta-Functionen in einer sehr allgemeinen Fassung. Um das Vorzeichen $(-1)^{(k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha)}$ für irgend eine besondere Wahl der Indices k, l, m zu bestimmen, hat man folgendermassen zu verfahren: Es sind $k\alpha$, $l\alpha$, $m\alpha$ auszudrücken durch die primitiven Indices, und zwar ist jedesmal diejenige der beiden Darstellungen zu wählen, die eine grade Anzahl von Gliedern enthält. Alsdann sind von diesen Darstellungen die grössten gemeinsamen Theiler K von $l\alpha$, $m\alpha$, L von $m\alpha$, $k\alpha$, M von $k\alpha$, $l\alpha$ abzusondern; dann ist

$$(-1)^{(k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha)} = (-1)^{K \mid k\alpha + Lm\alpha \mid l\alpha + Ml\alpha \mid m\alpha}. \tag{40}$$

Aus der Definition des Zeichens $a \mid b$ (Gl. (35)) geht hervor:

Da

$$\varepsilon^b + \varepsilon^c \equiv \varepsilon^{bc} \bmod 2,$$

so ist

(41) $$bc \mid a \equiv b \mid a + c \mid a.$$

Ferner, da

$$\delta^b + \delta^c \equiv \delta^{bc} \bmod 2,$$

so ist

(42) $$a \mid bc \equiv a \mid b + a \mid c.$$

Endlich ist $a \mid a \equiv 0$ oder 1, je nachdem a ein grader oder ungrader Index ist. Aus den Eigenschaften (41) und (42) folgt:

$$\begin{aligned} ab \mid ab &\equiv ab \mid a + ab \mid b, \\ ab \mid a &\equiv a \mid a + b \mid a, \\ ab \mid b &\equiv a \mid b + b \mid b. \end{aligned}$$

Mithin:

$$ab \mid ab + a \mid a + b \mid b \equiv a \mid b + b \mid a.$$

Daraus ergiebt sich, dass

$$a \mid b \equiv b \mid a$$

ist, wenn von den drei Indices a, b, ab alle oder nur einer grade ist; dagegen

$$a \mid b \equiv 1 + b \mid a,$$

wenn unter den Indices a, b, ab nur zwei oder gar kein grader vorhanden ist. Ferner lehren diese Congruenzen, dass sich schliesslich $(-1)^{(k\alpha, l\alpha, m\alpha)}$ in ein Product der Zeichen

$$(-1)^{\varkappa \mid \lambda}$$

auflösen lassen muss, wo $\varkappa$ und λ Indices der Reihe $1, 2 \cdots 2\varrho + 1$ sind. Diese genügen, da $\varkappa$, λ, und $\varkappa\lambda$ ungrade Indices sind, den Bedingungen:

(43) $$(-1)^{\varkappa \mid \varkappa} = -1,$$

(44) $$(-1)^{\varkappa \mid \lambda} = -(-1)^{\lambda \mid \varkappa} \quad (\varkappa \leq \lambda).$$

Wegen dieser Eigenschaft dienen diese Vorzeichen im Wesentlichen dazu, alternirende Functionen mehrerer Indices in symmetrische zu verwandeln.

§ 6.

Es sei a irgend ein grader Index; dann bezeichnen wir mit c_a den Werth, den die Function $\Theta(u, u', u'')_a$ annimmt, wenn die drei Variabeln gleich Null gesetzt werden. Es giebt also 36 Constanten c_a; die eine (schon früher definirte) c_0 und die 35 $c_{\varkappa\lambda\mu}$. Wir setzen

(45) $$\frac{c_{\varkappa\lambda\mu}}{c_0} = e_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Es sei jetzt a ein ungrader Index; dann fängt die Entwickelung der Function $\Theta(u, u', u'')_a$ nach aufsteigenden Dimensionen der Variabeln an mit einer linearen Function:

(46) $$u_a = A_a u + B_a u' + C_a u''.$$

Es giebt 28 ungrade Indices, die 7 primitiven $\varkappa$, und die 21 zusammengesetzten $\varkappa\lambda$; daher haben wir auch 28 solche lineare Functionen $u_\varkappa$ und $u_{\varkappa\lambda}$. Es sind jetzt die Relationen aufzustellen, welche zwischen diesen Constanten $e_{\varkappa\lambda\mu}$; $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$; $A_{\varkappa\lambda}$, $B_{\varkappa\lambda}$, $C_{\varkappa\lambda}$ bestehen; hierbei wird sich eine Darstellung dieser Grössen durch eine Anzahl von einander unabhängiger Parameter ergeben.

Wir setzen in der Gleichung (39) die sechs Constanten $v, v', v'', w, w', w'' = 0$; bezeichnen wir dann die Function $\Theta(u, u', u'')_m$ kurz durch Θ_m, so erhalten wir:

$$(47) \qquad c_0\, c_{kl}\, \Theta_{km}\, \Theta_{lm} = \sum_{\alpha=0}^{7} [(-1)^{(k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha)}\, c_{klm\alpha}\, c_{m\alpha}\, \Theta_{k\alpha}\, \Theta_{l\alpha}].$$

Setzen wir hier noch $u, u', u'' = 0$, so erhalten wir die Gleichung zwischen den Parametern:

$$(48) \qquad c_0\, c_{kl}\, c_{km}\, c_{lm} = \sum_{\alpha=0}^{7} [(-1)^{(k\alpha,\, l\alpha,\, m\alpha)}\, c_{k\alpha}\, c_{l\alpha}\, c_{m\alpha}\, c_{klm\alpha}].$$

Wir setzen jetzt in der ersten dieser Gleichungen:

$$k = \lambda\mu, \quad l = 0, \quad m = \varkappa\mu,$$

wo $\varkappa$, λ, μ drei verschiedene primitive Indices bedeuten. Alsdann ist kl ein ungrader Index; die linke Seite der Gleichung (47) verschwindet demnach, und wir erhalten:

$$\sum_{\alpha=0}^{7} [(-1)^{(\lambda\mu\alpha,\, \alpha,\, \varkappa\mu\alpha)}\, c_{\varkappa\lambda\alpha}\, c_{\varkappa\mu\alpha}\, \Theta_{\lambda\mu\alpha}\, \Theta\,] = 0.$$

Ausserdem verschwinden diejenigen Terme der Summe, welche sich auf die Indices 0, $\varkappa$, λ, μ beziehen. Die Summe ist also auszudehnen über die 4 Indices der Reihe $1, 2 \cdots 7$, welche von $\varkappa$, λ, μ verschieden. Diese seien: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Um nun K, L, M zu bestimmen, haben wir $\lambda\mu\alpha$ zu ersetzen durch $\varkappa\beta\gamma\delta$, α durch $\varkappa\lambda\mu\beta\gamma\delta$, $\varkappa\mu\alpha$ durch $\lambda\beta\gamma\delta$. Der gemeinsame Theiler von $\varkappa\lambda\mu\beta\gamma\delta$ und $\lambda\beta\gamma\delta$ ist $\lambda\beta\gamma\delta$, der gemeinsame Theiler von $\lambda\beta\gamma\delta$ und $\varkappa\beta\gamma\delta$ ist $\beta\gamma\delta$, von $\varkappa\beta\gamma\delta$ und $\varkappa\lambda\mu\beta\gamma\delta, \varkappa\beta\gamma\delta$. Wir bekommen also:

$$K = \lambda\beta\gamma\delta = \varkappa\mu\alpha, \quad L = \beta\gamma\delta = \varkappa\lambda\mu\alpha, \quad M = \varkappa\beta\gamma\delta = \lambda\mu\alpha.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}(\lambda\mu\alpha,\, \alpha,\, \varkappa\mu\alpha) &\equiv K \mid \lambda\mu\alpha + L\varkappa\mu\alpha \mid \alpha + M\alpha \mid \varkappa\mu\alpha \\ &\equiv \varkappa\mu\alpha \mid \lambda\mu\alpha + \lambda \mid \alpha + \lambda\mu \mid \varkappa\mu\alpha.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lambda\mu \mid \varkappa\mu\alpha \equiv 1 + \varkappa\mu\alpha \mid \lambda\mu,$$

da von den drei Indices $\varkappa\mu\alpha$, $\lambda\mu$, $\varkappa\lambda\alpha$ einer ungrade ist; ferner:

$$\varkappa\mu\alpha \mid \lambda\mu + \varkappa\mu\alpha \mid \lambda\mu\alpha \equiv \varkappa\mu\alpha \mid \alpha,$$

und

$$\varkappa\mu\alpha \mid \alpha + \lambda \mid \alpha \equiv \varkappa\lambda\mu\alpha \mid \alpha.$$

Daher ist

$$(\lambda\mu\alpha,\ \alpha,\ \varkappa\mu\alpha) \equiv 1 + \varkappa\lambda\mu\alpha \mid \alpha.$$

Wir erhalten also:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[(-1)^{\varkappa\lambda\mu\alpha \mid \alpha} c_{\varkappa\lambda\alpha}\, c_{\varkappa\mu\alpha}\, \Theta_{\lambda\mu\alpha}\, \Theta_\alpha] = 0. \tag{49}$$

Wenn wir das Product $\Theta_{\lambda\mu\alpha}\Theta_\alpha$ nach aufsteigenden Dimensionen der Variabeln entwickeln, so ist das Anfangsglied: $c_{\lambda\mu\alpha}u_\alpha$; daher muss zwischen den vier linearen Functionen u_α, u_β, u_γ, u_δ die Gleichung bestehen:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[(-1)^{\varkappa\lambda\mu\alpha \mid \alpha} c_{\varkappa\lambda\alpha}\, c_{\varkappa\mu\alpha}\, c_{\lambda\mu\alpha}\, u_\alpha] = 0.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $\frac{e_{\varkappa\lambda\mu}}{c_0^3}$; dann ergiebt sich:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[(-1)^{\varkappa\lambda\mu\alpha \mid \alpha} c_{\varkappa\lambda\alpha}\, c_{\varkappa\mu\alpha}\, c_{\lambda\mu\alpha}\, c_{\varkappa\lambda\mu}\, u_\alpha] = 0.$$

Nun ist $e_{\varkappa\lambda\alpha}\, e_{\varkappa\mu\alpha}\, e_{\lambda\mu\alpha}\, e_{\varkappa\lambda\mu}$ ein in Bezug auf die Indices $\varkappa$, λ, μ, α symmetrischer Ausdruck, den wir deshalb durch $E_{\beta\gamma\delta}$ bezeichnen können. Ferner ist $\varkappa\lambda\mu\alpha = \beta\gamma\delta$, $\varkappa\lambda\mu\beta = \gamma\delta\alpha$ u. s. f.; es ist also

$$\begin{aligned}&(-1)^{\beta\gamma\delta \mid \alpha} E_{\beta\gamma\delta}\, u_\alpha + (-1)^{\gamma\delta\alpha \mid \beta} E_{\gamma\delta\alpha}\, u_\beta \\ &+ (-1)^{\delta\alpha\beta \mid \gamma} E_{\delta\alpha\beta}\, u_\gamma + (-1)^{\alpha\beta\gamma \mid \delta} E_{\alpha\beta\gamma}\, u_\delta = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für willkürliche Werthe von u, u', u''. Wir bestimmen diese so, dass u_γ und u_δ verschwindet; dann ist:

$$u_\alpha : u_\beta = \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \\ A_\delta & B_\delta & C_\delta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \\ A_\delta & B_\delta & C_\delta \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(-1)^{\beta\gamma\delta \mid \alpha} &= (-1)^{\beta \mid \alpha}(-1)^{\gamma\delta \mid \alpha} = \quad (-1)^{\beta \mid \alpha}(-1)^{\alpha \mid \gamma\delta}, \\ (-1)^{\gamma\delta\alpha \mid \beta} &= (-1)^{\alpha \mid \beta}(-1)^{\gamma\delta \mid \beta} = -(-1)^{\beta \mid \alpha}(-1)^{\beta \mid \gamma\delta}.\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir:

$$E_{\alpha\gamma\delta} : E_{\beta\gamma\delta} = (-1)^{\alpha \mid \gamma\delta} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \\ A_\delta & B_\delta & C_\delta \end{vmatrix} : (-1)^{\beta \mid \gamma\delta} \begin{vmatrix} A_\beta & B_\beta & C_\beta \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \\ A_\delta & B_\delta & C_\delta \end{vmatrix}.$$

Wir setzen nun:

$$(-1)^{\alpha \mid \gamma\delta + \gamma \mid \delta} \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & C_\alpha \\ A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \\ A_\delta & B_\delta & C_\delta \end{vmatrix} = F_{\alpha\gamma\delta}. \tag{50}$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf die drei Indices α, γ, δ; denn das der Determinante vorangesetzte Zeichen verwandelt seinen Werth in den entgegengesetzten, wenn zwei der Indices α, γ, δ mit einander vertauscht werden. Es ergiebt sich dann:

$$\frac{E_{\alpha\gamma\delta}}{F_{\alpha\gamma\delta}} = \frac{E_{\beta\gamma\delta}}{F_{\beta\gamma\delta}}.$$

Hieraus ist klar, dass dieser Quotient eine von jeder Vertauschung der Indices unabhängige Grösse r ist. Mithin erhalten wir:

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta\alpha} e_{\delta\alpha\beta} = r F_{\varkappa\lambda\mu}. \tag{51}$$

Hiermit ist ein System von 35 Gleichungen gegeben, aus welchem sich die Grössen e bestimmen lassen. Zu diesem Zweck führen wir eine Reihe von Bezeichnungen ein:

$$\Pi(F_{\varkappa\lambda\alpha}) = F_{\varkappa\lambda}, \quad \Pi(F_{\varkappa\alpha\beta}) = F_{\varkappa}, \quad \Pi(F_{\alpha\beta\gamma}) = F. \tag{52}$$

Das erste Product soll erstreckt sein über alle 5 dreigliedrigen Indices, welche $\varkappa$ und λ enthalten, das zweite über alle 15, welche $\varkappa$ enthalten, das letzte über alle 35 überhaupt. In derselben Weise definiren wir:

$$\Pi(e_{\varkappa\lambda\alpha}) = e_{\varkappa\lambda}, \quad \Pi(e_{\varkappa\alpha\beta}) = e_{\varkappa}, \quad \Pi(e_{\alpha\beta\gamma}) = e. \tag{53}$$

Setzt man in die Formeln (52) die Werthe der Grössen $F_{\varkappa\lambda\mu}$ nach (51) ein, so ergiebt sich:

$$r^5 F_{\varkappa\lambda} = \frac{e^2 e_{\varkappa\lambda}^2}{e_{\varkappa}^2 e_{\lambda}^2}, \quad r^{15} F_{\varkappa} = \frac{e^3}{e_{\varkappa}^3}, \quad r^{35} F = e^4. \tag{54}$$

Ferner ist, wie man leicht erkennt:

$$\frac{e\, e_{\varkappa\lambda}\, e_{\varkappa\mu}\, e_{\lambda\mu}}{e_{\varkappa}\, e_{\lambda}\, e_{\mu}\, e_{\varkappa\lambda\mu}} = e_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta\alpha} e_{\delta\alpha\beta}. \tag{55}$$

Folglich

$$e_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{e\, e_{\varkappa\lambda}\, e_{\varkappa\mu}\, e_{\lambda\mu}}{r\, e_{\varkappa}\, e_{\lambda}\, e_{\mu} F_{\varkappa\lambda\mu}}. \tag{56}$$

Durch die Formeln (54) ist e, $e_{\varkappa}$, $e_{\varkappa\lambda}$, durch (56) alsdann $e_{\varkappa\lambda\mu}$ bestimmt.

§ 7.

Um weitere Relationen unter den Moduln zu erhalten, setzen wir in der Gleichung (48):

$$k = \varkappa\lambda, \quad l = \mu\nu, \quad m = \varkappa\mu\varrho,$$

wo $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho$ fünf Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots 7$ bedeuten. Unter dieser Voraussetzung geht dieselbe über in folgende:

$$c_0\, c_{\varkappa\lambda\mu\nu}\, c_{\varrho\lambda\mu}\, c_{\varrho\varkappa\nu} = \sum_{\alpha=0}^{7} [(-1)^{(\varkappa\lambda\alpha,\, \mu\nu\alpha,\, \varkappa\mu\varrho\alpha)} c_{\varkappa\lambda\alpha} c_{\mu\nu\alpha} c_{\varrho\varkappa\mu\alpha} c_{\varrho\lambda\nu\alpha}].$$

Hier verschwinden alle Glieder, die sich auf $\alpha = 0,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varrho$ beziehen; es bleiben also nur die beiden Terme stehen, die sich auf die beiden übrigen primitiven Indices beziehen, welche wir mit α und β bezeichnen wollen. Es ist dann

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \mu\nu\alpha,\ \varkappa\mu\varrho\alpha) = (\mu\nu\varrho\beta,\ \varkappa\lambda\varrho\beta,\ \varkappa\mu\varrho\alpha).$$

Hier ergiebt sich:

$$K = \varkappa\varrho,\quad L = \mu\varrho,\quad M = \beta\varrho,$$
$$Lm = \varkappa\alpha,\quad Ml = \beta\varrho\mu\nu\alpha = \varkappa\lambda.$$

Daher ist

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \mu\nu\alpha,\ \varkappa\mu\varrho\alpha) = \varkappa\varrho \mid \varkappa\lambda\alpha + \varkappa\alpha \mid \mu\nu\alpha + \varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\varrho\alpha.$$

Für $\varkappa\varrho \mid \varkappa\lambda\alpha$ können wir setzen:

$$1 + \varkappa\lambda\alpha \mid \varkappa\varrho,$$

für $\varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\varrho\alpha$:

$$\varkappa\lambda \mid \alpha\mu + \varkappa\lambda \mid \varkappa\varrho,$$

daher für $\varkappa\varrho \mid \varkappa\lambda\alpha + \varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\varrho\alpha$:

$$1 + \varkappa\lambda \mid \alpha\mu + \alpha \mid \varkappa\varrho.$$

Ferner ist

$$\varkappa\alpha \mid \mu\nu\alpha \equiv \varkappa\alpha \mid \alpha\mu + \varkappa\alpha \mid \nu;$$

folglich ist

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \mu\nu\alpha,\ \varkappa\mu\varrho\alpha) \equiv 1 + \alpha\lambda \mid \alpha\mu + \varkappa\alpha \mid \nu + \alpha \mid \varkappa\varrho.$$

Nun ist

$$1 + \alpha\lambda \mid \alpha\mu - \alpha\lambda \mid \lambda\mu - \lambda \mid \lambda\mu + \alpha \mid \lambda\mu,$$
$$\varkappa\alpha \mid \nu - \varkappa \mid \nu + \alpha \mid \nu.$$

Folglich

$$1 + \alpha\lambda \mid \alpha\mu + \varkappa\alpha \mid \nu + \alpha \mid \varkappa\varrho = \lambda \mid \lambda\mu + \varkappa \mid \nu + \alpha \mid \varkappa\lambda\mu\nu\varrho.$$

Es ist aber

$$\varkappa\lambda\mu\nu\varrho = \alpha\beta;$$

daher:

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \mu\nu\alpha,\ \varkappa\mu\varrho\alpha) \equiv \lambda \mid \lambda\mu + \varkappa \mid \nu + \alpha \mid \alpha\beta$$
$$= \alpha \mid \beta + \varkappa \mid \nu + \lambda \mid \mu.$$

Das andere Zeichen $(\varkappa\lambda\beta,\ \mu\nu\beta,\ \varkappa\mu\varrho\beta)$ ergiebt sich aus diesem durch Vertauschung von α und β. Da nun $(-1)^{\alpha\mid\beta} = -(-1)^{\beta\mid\alpha}$ ist, so folgt:

$$c_0 c_{\varrho\alpha\beta} c_{\varrho\varkappa\nu} c_{\varrho\lambda\mu} = (-1)^{\alpha\mid\beta+\varkappa\mid\nu+\lambda\mid\mu}(c_{\alpha\varkappa\lambda}c_{\alpha\mu\nu}c_{\beta\varkappa\mu}c_{\beta\lambda\nu} - c_{\beta\varkappa\lambda}c_{\beta\mu\nu}c_{\alpha\varkappa\mu}c_{\alpha\lambda\nu}),$$

daher:

$$(57)\quad e_{\varrho\alpha\beta} e_{\varrho\varkappa\nu} e_{\varrho\lambda\mu} = (-1)^{\alpha\mid\beta+\varkappa\mid\nu+\lambda\mid\mu}(e_{\alpha\varkappa\lambda}e_{\alpha\mu\nu}e_{\beta\varkappa\mu}e_{\beta\lambda\nu} - e_{\beta\varkappa\lambda}e_{\beta\mu\nu}e_{\alpha\varkappa\mu}e_{\alpha\lambda\nu}).$$

Es ist nun

$$rF_{\alpha\varkappa\lambda} = e_{\varrho\beta\mu}e_{\varrho\beta\nu}e_{\varrho\mu\nu}e_{\beta\mu\nu},$$
$$rF_{\alpha\mu\nu} = e_{\varrho\beta\varkappa}e_{\varrho\beta\lambda}e_{\varrho\varkappa\lambda}e_{\beta\varkappa\lambda},$$
$$rF_{\beta\varkappa\mu} = e_{\varrho\alpha\lambda}e_{\varrho\alpha\nu}e_{\varrho\lambda\nu}e_{\alpha\lambda\nu},$$
$$rF_{\beta\lambda\nu} = e_{\varrho\alpha\varkappa}e_{\varrho\alpha\mu}e_{\varrho\varkappa\mu}e_{\alpha\varkappa\mu}.$$

In diesen vier Ausdrücken kommen alle Grössen vor, die in dem Product e_ϱ enthalten sind, mit Ausnahme von $e_{\varrho\alpha\beta}$, $e_{\varrho\varkappa\nu}$, $e_{\varrho\lambda\mu}$. Demnach ist

$$r^4 F_{\alpha\varkappa\lambda} F_{\alpha\mu\nu} F_{\beta\varkappa\mu} F_{\beta\lambda\nu} = e_\varrho \frac{e_{\beta\varkappa\lambda} e_{\beta\mu\nu} e_{\alpha\varkappa\mu} e_{\alpha\lambda\nu}}{e_{\varrho\alpha\beta} e_{\varrho\varkappa\nu} e_{\varrho\lambda\mu}},$$

$$r^4 F_{\beta\varkappa\lambda} F_{\beta\mu\nu} F_{\alpha\varkappa\mu} F_{\alpha\lambda\nu} = e_\varrho \frac{e_{\alpha\varkappa\lambda} e_{\alpha\mu\nu} e_{\beta\varkappa\mu} e_{\beta\lambda\nu}}{e_{\varrho\alpha\beta} e_{\varrho\varkappa\nu} e_{\varrho\lambda\mu}}.$$

Vermöge dieser beiden Formeln geht die Gleichung (57) über in folgende:

$$(58) \quad \frac{-e_\varrho}{r^4} = (F_{\alpha\varkappa\lambda} F_{\alpha\mu\nu} F_{\beta\varkappa\mu} F_{\beta\lambda\nu} \quad F_{\beta\varkappa\lambda} F_{\beta\mu\nu} F_{\alpha\varkappa\mu} F_{\alpha\lambda\nu})(-1)^{\alpha|\beta+\varkappa|\nu+\lambda\mu}.$$

Setzen wir hier für $F_{\alpha\varkappa\lambda}$, $F_{\alpha\mu\nu}$ etc. die in der Gleichung (50) angegebenen Werthe dieser Grössen, so verwandelt sich der Ausdruck auf der rechten Seite in eine ganze rationale Function der Werthsysteme A_α, B_α, C_α; A_β, B_β, $C_\beta \cdots A_\nu$, B_ν, C_ν. Fassen wir denselben auf als Function eines dieser Werthsysteme, so stellt er eine ganze homogene Function zweiten Grades dar, welche verschwindet, wenn A_α, B_α, C_α gleich einem der 5 anderen Systeme: A_β, B_β, $C_\beta \cdots A_\nu$, B_ν, C_ν gesetzt wird. Der Ausdruck muss daher dargestellt werden können in der Form:

$$(59) \quad \varepsilon \begin{vmatrix} A_\alpha^2 & B_\alpha^2 & C_\alpha^2 & B_\alpha C_\alpha & C_\alpha A_\alpha & A_\alpha B_\alpha \\ A_\beta^2 & B_\beta^2 & C_\beta^2 & B_\beta C_\beta & C_\beta A_\beta & A_\beta B_\beta \\ A_\varkappa^2 & B_\varkappa^2 & C_\varkappa^2 & B_\varkappa C_\varkappa & C_\varkappa A_\varkappa & A_\varkappa B_\varkappa \\ A_\lambda^2 & B_\lambda^2 & C_\lambda^2 & B_\lambda C_\lambda & C_\lambda A_\lambda & A_\lambda B_\lambda \\ A_\mu^2 & B_\mu^2 & C_\mu^2 & B_\mu C_\mu & C_\mu A_\mu & A_\mu B_\mu \\ A_\nu^2 & B_\nu^2 & C_\nu^2 & B_\nu C_\nu & C_\nu A_\nu & A_\nu B_\nu \end{vmatrix},$$

wo ε einen Factor bedeutet, der offenbar nicht nur von A_α, B_α, C_α sondern auch von A_β, B_β, $C_\beta \cdots A_\nu$, B_ν, C_ν unabhängig ist. Die Vergleichung des Diagonalgliedes in dieser Determinante mit dem entsprechenden Gliede in dem ursprünglichen Ausdruck zeigt, dass

$$(60) \quad \varepsilon = (-1)^{\alpha|\beta\varkappa\lambda\mu\nu+\beta|\varkappa\lambda\mu\nu+\varkappa|\lambda\mu\nu+\lambda|\mu\nu+\mu|\nu}$$

ist. Dieses Vorzeichen verwandelt seinen Werth in den entgegengesetzten, wenn irgend zwei der Indices α, β, $\varkappa$, λ, μ, ν mit einander vertauscht werden. Daraus folgt, dass der Ausdruck (60) eine symmetrische Function dieser 6 Indices ist, die wir demnach durch G_ϱ bezeichnen können, wo ϱ den einzigen noch übrig bleibenden primitiven Index bedeutet. Wir erhalten also:

$$(61) \quad \begin{aligned} &(-1)^{\alpha|\beta+\varkappa|\nu+\lambda|\mu}(F_{\alpha\varkappa\lambda} F_{\alpha\mu\nu} F_{\beta\varkappa\mu} F_{\beta\lambda\nu} - F_{\beta\varkappa\lambda} F_{\beta\mu\nu} F_{\alpha\varkappa\mu} F_{\alpha\lambda\nu}) = G_\varrho, \\ &\frac{-e_\varrho}{r^4} = G_\varrho. \end{aligned}$$

§ 8.

Wir sind jetzt im Stande, die Constanten $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$, und die Moduln $c_{\varkappa\lambda\mu}$ durch eine Anzahl unabhängiger Grössen auszudrücken. Wir wählen hierfür die Verhältnisse $\frac{B_\varkappa}{A_\varkappa}$, $\frac{C_\varkappa}{A_\varkappa}$. Es werde gesetzt:

$$A_\varkappa = l_\varkappa a_\varkappa, \quad B_\varkappa = l_\varkappa b_\varkappa, \quad C_\varkappa = l_\varkappa c_\varkappa,$$
$$v_\varkappa = a_\varkappa u + b_\varkappa u' + c_\varkappa u'', \tag{62}$$

sodass

$$u_\varkappa = l_\varkappa v_\varkappa$$

ist. Von diesen Grössen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ kann stets eine willkürlich gewählt werden. Aber von den übrigen 14 Grössen können ausserdem noch 8 willkürlich angenommen werden, da nichts wesentliches geändert wird, wenn wir die Variabeln u, u', u'' einer linearen Transformation unterwerfen. Haben wir also die Moduln dargestellt durch die 21 Constanten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, so werden wir die Anzahl dieser Parameter, sobald wir wollen, auf 6 reduciren können. Indess gestalten sich die Resultate übersichtlicher ohne solche besondere Annahmen.

Wir denken uns in allen gefundenen Gleichungen die Werthe $l_\varkappa a_\varkappa$, $l_\varkappa b_\varkappa$, $l_\varkappa c_\varkappa$ für $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$ eingesetzt. Die Functionen, welche wir erhalten, wenn wir in den Ausdrücken von $F_{\varkappa\lambda\mu}$, $F_{\varkappa\lambda}$, $F_\varkappa$, F und G_ϱ sämmtliche Grössen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$ ersetzen durch $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, bezeichnen wir durch $f_{\varkappa\lambda\mu}$, $f_{\varkappa\lambda}$, $f_\varkappa$, f und g_ϱ. Ferner führen wir zur Abkürzung die beiden Bezeichnungen ein:

$$l_1 l_2 \cdots l_7 = l \quad \text{und} \quad g_1 g_2 \cdots g_7 = g. \tag{63}$$

Es ist dann:

$$F_{\varkappa\lambda\mu} = l_\varkappa l_\lambda l_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}, \tag{64}$$

$$G_\varrho = \frac{l^2}{l_\varrho^2} g_\varrho. \tag{65}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$F_{\varkappa\lambda} = l\, l_\varkappa^4\, l_\lambda^4 f_{\varkappa\lambda}, \quad F_\varkappa = l^5\, l_\varkappa^{10} f_\varkappa, \quad F = l^{15} f. \tag{66}$$

Dadurch gehen die Gleichungen (54), (56) und (61) über in folgende:

$$r^5\, l\, l_\varkappa^4\, l_\lambda^4 f_{\varkappa\lambda} = \frac{e^2 e_{\varkappa\lambda}^2}{e_\varkappa^2 e_\lambda^2}, \quad r^{15}\, l^5\, l_\varkappa^{10} f_\varkappa = \frac{e^3}{e_\varkappa^3}, \quad r^{35}\, l^{15} f = e^4, \tag{67}$$

$$e_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{e\, e_{\varkappa\lambda} e_{\varkappa\mu} e_{\lambda\mu}}{r\, e_\varkappa e_\lambda e_\mu\, l_\varkappa l_\lambda l_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}}, \tag{68}$$

$$\frac{-e_\varrho}{r^4} = \frac{l^2}{l_\varrho^2} g_\varrho. \tag{69}$$

In der letzten Gleichung setzen wir $\varrho = 1, 2 \cdots 7$ und bilden das Product; dann ergiebt sich, da offenbar $e_1 e_2 \cdots e_7 = e^3$ ist:

(70) $$-e^3 = r^{28} l^{12} g.$$

Wir haben nun mit Hülfe dieser Gleichungen die Grössen e, $e_\varkappa$, $e_{\varkappa\lambda}$, $e_{\varkappa\lambda\mu}$, l, $l_\varkappa$ auszudrücken durch die Constanten r, $f_{\varkappa\lambda\mu}$ und $g_\varkappa$. Aus der letzten Formel in dem Gleichungssystem (67) und aus (70) folgt zunächst:

(71) $$e = -\frac{f^4}{g^5},$$

(72) $$l^3 r^7 = \frac{f^3}{g^4}.$$

Ferner aus (67) und (69):

(73) $$e_\varkappa^2 = \frac{f^3}{g^5} f_\varkappa g_\varkappa^5,$$

(74) $$l_\varkappa^4 = \frac{rlg}{f_\varkappa g_\varkappa^3}.$$

Endlich, ebenfalls aus (67):

(75) $$e_{\varkappa\lambda}^2 = \frac{f}{g^2} g_\varkappa^2 g_\lambda^2 f_{\varkappa\lambda}.$$

Jetzt können wir den Modul $e_{\varkappa\lambda\mu}$ selbst darstellen. Nach (68) ist:

$$e_{\varkappa\lambda\mu}^2 = \frac{e^2 e_{\varkappa\lambda}^2 e_{\varkappa\mu}^2 e_{\lambda\mu}^2}{r^2 e_\varkappa^2 e_\lambda^2 e_\mu^2 l_\varkappa^2 l_\lambda^2 l_\mu^2 f_{\varkappa\lambda\mu}^2}.$$

Nun ist

$$e^2 = \frac{f^8}{g^{10}} \text{ nach (71)},$$

$$e_{\varkappa\lambda}^2 e_{\varkappa\mu}^2 e_{\lambda\mu}^2 = \frac{f^3}{g^6} g_\varkappa^4 g_\lambda^4 g_\mu^4 f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu} \text{ nach (75)},$$

$$r^2 e_\varkappa e_\lambda e_\mu l_\varkappa^2 l_\lambda^2 l_\mu^2 = -r^4 l^6 g_\varkappa g_\lambda g_\mu = -\frac{f^6}{g^8} g_\varkappa g_\lambda g_\mu$$

(nach (69) und (72)).

Daraus folg :

$$e_{\varkappa\lambda\mu}^2 = -\frac{f^5}{g^6} \frac{g_\varkappa^3 g_\lambda^3 g_\mu^3 f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu}}{e_\varkappa e_\lambda e_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}^2}.$$

Erhebt man diese Gleichung noch einmal zum Quadrat, so folgt, da nach (73)

$$e_\varkappa^2 e_\lambda^2 e_\mu^2 = \frac{f^9}{g^{15}} f_\varkappa f_\lambda f_\mu g_\varkappa^5 g_\lambda^5 g_\mu^5$$

ist:

$$e_{\varkappa\lambda\mu}^4 = \frac{f}{g} \frac{g_\varkappa g_\lambda g_\mu f_{\varkappa\lambda}^2 f_{\varkappa\mu}^2 f_{\lambda\mu}^2}{f_\varkappa f_\lambda f_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}^4}.$$

Nach (55) ist

$$\frac{f f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu}}{f_\varkappa f_\lambda f_\mu f_{\varkappa\lambda\mu}} = f_{\alpha\beta\gamma} f_{\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} f_{\delta\alpha\beta}.$$

Ausserdem:

$$g = g_\varkappa g_\lambda g_\mu g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta;$$

daher:

$$e^4_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{f_{\varkappa\lambda} f_{\varkappa\mu} f_{\lambda\mu} f_{\alpha\beta\gamma} f_{\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} f_{\delta\alpha\beta}}{g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta f^3_{\varkappa\lambda\mu}},$$

oder, wenn wir die Producte $f_{\varkappa\lambda}$, $f_{\varkappa\mu}$, $f_{\lambda\mu}$ auflösen:

$$e^4_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{f_{\varkappa\lambda\alpha} f_{\varkappa\lambda\beta} f_{\varkappa\lambda\gamma} f_{\varkappa\lambda\delta} f_{\varkappa\mu\alpha} f_{\varkappa\mu\beta} f_{\varkappa\mu\gamma} f_{\varkappa\mu\delta} f_{\lambda\mu\alpha} f_{\lambda\mu\beta} f_{\lambda\mu\gamma} f_{\lambda\mu\delta} f_{\alpha\beta\gamma} f_{\beta\gamma\delta} f_{\gamma\delta\alpha} f_{\delta\alpha\beta}}{g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta}.$$

Diese Formel können wir so darstellen:

$$e^4_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{\Pi(f_m)}{\Pi(g_\alpha)}. \tag{76}$$

Das Product im Zähler ist zu erstrecken über alle diejenigen graden Indices m, für welche $m\varkappa\lambda\mu$ ein ungrader Index ist; das Product $\Pi(g_\alpha)$ dagegen über alle von $\varkappa$, λ, μ verschiedenen primitiven Indices.

§ 9.

Es bleibt noch übrig, die Anfangsglieder

$$u_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda} u + B_{\varkappa\lambda} u' + C_{\varkappa\lambda} u''$$

der 21 Functionen $\Theta_{\varkappa\lambda}$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck setzen wir in der Gleichung (47):

$$k = \varkappa\lambda, \quad m = \varkappa\mu\nu, \quad l = 0,$$

wo $\varkappa$, λ, μ, ν vier verschiedene primitive Indices bedeuten sollen. Es ist dann, da $c_{kl} = 0$ ist,

$$\sum_{\alpha=0}^{7} [(-1)^{(\varkappa\lambda\alpha,\ \alpha,\ \varkappa\mu\nu\alpha)} c_{\varkappa\mu\nu\alpha} c_{\lambda\mu\nu\alpha} \Theta_{\varkappa\lambda\alpha} \Theta_\alpha].$$

Hier fallen fort die Glieder: $\varkappa$, λ, μ, ν, es bleiben übrig die vier: 0, α, β, γ. Es ist nun zunächst

$$(\varkappa\lambda,\ 0,\ \varkappa\mu\nu) = (\varkappa\lambda,\ 0,\ \alpha\beta\gamma\lambda).$$

Hier ist offenbar $K = 0$, $L = \lambda$, $M = 0$, daher

$$(\varkappa\lambda,\ 0,\ \varkappa\mu\nu) \equiv 0 \bmod 2.$$

Ist dagegen α von 0, $\varkappa$, λ, μ, ν verschieden, so erhalten wir

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \alpha,\ \varkappa\mu\nu\alpha) = (\mu\nu\beta\gamma,\ \varkappa\lambda\mu\nu\beta\gamma,\ \varkappa\mu\nu\alpha).$$

Hier ergiebt sich:

$$K = \varkappa\mu\nu, \quad L = \mu\nu, \quad M = \mu\nu\beta\gamma,$$
$$Lm = \varkappa\alpha, \quad Ml = \mu\nu\beta\gamma\alpha = \varkappa\lambda.$$

Es ist daher:

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \alpha,\ \varkappa\mu\nu\alpha) = \varkappa\mu\nu \mid \varkappa\lambda\alpha + \varkappa\alpha \mid \alpha + \varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\nu\alpha.$$

Es ist aber

$$\varkappa\mu\nu \mid \varkappa\lambda\alpha \equiv \varkappa\mu\nu \mid \varkappa\lambda + \varkappa\mu\nu \mid \alpha,$$
$$\varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\nu\alpha \equiv \varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\nu + \varkappa\lambda \mid \alpha,$$
$$\varkappa\mu\nu \mid \varkappa\lambda + \varkappa\lambda \mid \varkappa\mu\nu \equiv 1 \bmod 2,$$

weil von den drei Indices $\varkappa\mu\nu$, $\varkappa\lambda$, $\lambda\mu\nu$ nur einer ungrade ist. Mithin:

$$(\varkappa\lambda\alpha,\ \alpha,\ \varkappa\mu\nu\alpha) \equiv 1 + \varkappa\lambda \mid \alpha + \varkappa\mu\nu \mid \alpha + \varkappa\alpha \mid \alpha,$$

dies ist

$$\equiv 1 + \beta\gamma \mid \alpha.$$

demnach ergiebt sich folgende Gleichung:

$$(77)\quad c_{\varkappa\mu\nu}c_{\lambda\mu\nu}\Theta\Theta_{\varkappa\lambda} = (-1)^{\beta\gamma\,|\,\alpha}c_{\beta\gamma\varkappa}c_{\beta\gamma\lambda}\Theta_{\varkappa\lambda\alpha}\Theta_\alpha + (-1)^{\gamma\alpha\,|\,\beta}c_{\gamma\alpha\varkappa}c_{\gamma\alpha\lambda}\Theta_{\varkappa\lambda\beta}\Theta_\beta + (-1)^{\alpha\beta\,|\,\gamma}c_{\alpha\beta\varkappa}c_{\alpha\beta\lambda}\Theta_{\varkappa\lambda\gamma}\Theta_\gamma.$$

Wir verfahren mit dieser Gleichung ebenso, wie früher mit (49). Das Anfangsglied der ungraden Function $\Theta\Theta_{\varkappa\lambda}$ ist $c_0 u_{\varkappa\lambda}$, das Anfangsglied von $\Theta_{\varkappa\lambda\alpha}\Theta_\alpha$ ist $c_{\varkappa\lambda\alpha}u_\alpha$ oder $c_{\varkappa\lambda\alpha}l_\alpha v_\alpha$. Demnach ist

$$(78)\quad u_{\varkappa\lambda} = (-1)^{\beta\gamma\,|\,\alpha}\frac{e_{\alpha\varkappa\lambda}e_{\beta\gamma\varkappa}e_{\beta\gamma\lambda}}{e_{\varkappa\mu\nu}e_{\lambda\mu\nu}}l_\alpha v_\alpha + (-1)^{\gamma\alpha\,|\,\beta}\frac{e_{\beta\varkappa\lambda}e_{\gamma\alpha\varkappa}e_{\gamma\alpha\lambda}}{e_{\varkappa\mu\nu}e_{\lambda\mu\nu}}l_\beta v_\beta + (-1)^{\alpha\beta\,|\,\gamma}\frac{e_{\gamma\varkappa\lambda}e_{\alpha\beta\varkappa}e_{\alpha\beta\lambda}}{e_{\varkappa\mu\nu}e_{\lambda\mu\nu}}l_\gamma v_\gamma.$$

Hierdurch ist $u_{\varkappa\lambda}$ linear dargestellt durch v_α, v_β, v_γ; wo α, β, γ drei beliebige von $\varkappa$, λ verschiedene Indices bedeuten. Wir suchen jetzt den Coefficienten

$$H = e_{\alpha\varkappa\lambda}l_\alpha\frac{e_{\beta\gamma\varkappa}e_{\beta\gamma\lambda}}{e_{\mu\nu\varkappa}e_{\mu\nu\lambda}},$$

durch die unabhängigen Grössen a, b, c auszudrücken. Nach Formel (51) und (64) ist

$$e_{\beta\gamma\varkappa}e_{\beta\gamma\lambda} = \frac{rl_\alpha l_\mu l_\nu f_{\alpha\mu\nu}}{e_{\beta\varkappa\lambda}e_{\gamma\varkappa\lambda}},$$

$$e_{\mu\nu\varkappa}e_{\mu\nu\lambda} = \frac{rl_\alpha l_\beta l_\gamma f_{\alpha\beta\gamma}}{e_{\mu\varkappa\lambda}e_{\nu\varkappa\lambda}}.$$

Daraus folgt:

$$H = \frac{l_\alpha l_\mu l_\nu}{l_\beta l_\gamma}\frac{e_{\alpha\varkappa\lambda}e_{\mu\varkappa\lambda}e_{\nu\varkappa\lambda}}{e_{\beta\varkappa\lambda}e_{\gamma\varkappa\lambda}}\frac{f_{\alpha\mu\nu}}{f_{\alpha\beta\gamma}}.$$

Wenn wir nun aus der Gleichung (68) die Werthe von $e_{\alpha\varkappa\lambda}$, $e_{\mu\varkappa\lambda}$ etc. einsetzen, so wird

$$\frac{e_{\alpha\varkappa\lambda}e_{\mu\varkappa\lambda}e_{\nu\varkappa\lambda}}{e_{\beta\varkappa\lambda}e_{\gamma\varkappa\lambda}} = \frac{e}{r}\frac{e_\beta e_\gamma l_\beta l_\gamma e_{\alpha\varkappa}e_{\mu\varkappa}e_{\nu\varkappa}e_{\alpha\lambda}e_{\mu\lambda}e_{\nu\lambda}e_{\varkappa\lambda}f_{\beta\varkappa\lambda}f_{\gamma\varkappa\lambda}}{e_\alpha e_\mu e_\nu e_\varkappa e_\lambda l_\alpha l_\mu l_\nu l_\varkappa l_\lambda e_{\beta\varkappa}e_{\gamma\varkappa}e_{\beta\lambda}e_{\gamma\lambda}f_{\alpha\varkappa\lambda}f_{\mu\varkappa\lambda}f_{\nu\varkappa\lambda}}.$$

Es ist aber:

$$e_{\alpha\varkappa}e_{\mu\varkappa}e_{\nu\varkappa}e_{\lambda\varkappa}e_{\beta\varkappa}e_{\gamma\varkappa} = e_\varkappa^2,$$

$$e_{\alpha\lambda}e_{\mu\lambda}e_{\nu\lambda}e_{\varkappa\lambda}e_{\beta\lambda}e_{\gamma\lambda} = e_\lambda^2.$$

Folglich:

$$\frac{e_{\alpha\varkappa}e_{\mu\varkappa}e_{\nu\varkappa}e_{\alpha\lambda}e_{\mu\lambda}e_{\nu\lambda}e_{\varkappa\lambda}}{e_{\beta\varkappa}e_{\gamma\varkappa}\quad e_{\beta\lambda}e_{\gamma\lambda}} = \frac{e_\varkappa^2 e_\lambda^2}{e_{\varkappa\lambda}e_{\beta\varkappa}^2 e_{\gamma\varkappa}^2 e_{\beta\lambda}^2 e_{\gamma\lambda}^2}$$

und daher:

$$\frac{e_{\alpha\varkappa\lambda}\, e_{\mu\varkappa\lambda}\, e_{\nu\varkappa\lambda}}{e_{\beta\varkappa\lambda}\, e_{\gamma\varkappa\lambda}} = \frac{c}{r}\, \frac{e_\beta\, e_\gamma\, e_\varkappa\, e_\lambda\, l_\beta\, l_\gamma\, f_{\beta\varkappa\lambda}\, f_{\gamma\varkappa\lambda}}{e_{\varkappa\lambda}\, e_\alpha\, e_\mu\, e_\nu\, l_\alpha\, l_\mu\, l_\nu\, l_\varkappa\, l_\lambda\, e_{\beta\varkappa}^2\, e_{\gamma\varkappa}^2\, e_{\beta\lambda}^2\, e_{\gamma\lambda}^2\, f_{\alpha\varkappa\lambda}\, f_{\mu\varkappa\lambda}\, f_{\nu\varkappa\lambda}}.$$

Da ferner

$$e_\alpha\, e_\beta\, e_\gamma\, e_\varkappa\, e_\lambda\, e_\mu\, e_\nu = e^3$$

ist, so können wir setzen:

$$\frac{e_\beta\, e_\gamma\, e_\varkappa\, e_\lambda}{e_\alpha\, e_\mu\, e_\nu} = \frac{e_\beta^2\, e_\gamma^2\, e_\varkappa^2\, e_\lambda^2}{e^3}.$$

Somit ergiebt sich:

$$H = \frac{1}{re^2}\, \frac{e_\beta^2\, e_\gamma^2\, e_\varkappa^2\, e_\lambda^2\, f_{\beta\varkappa\lambda}\, f_{\gamma\varkappa\lambda}\, f_{\alpha\mu\nu}}{l_\varkappa\, l_\lambda\, e_{\varkappa\lambda}\, e_{\beta\varkappa}^2\, e_{\gamma\varkappa}^2\, e_{\beta\lambda}^2\, e_{\gamma\lambda}^2\, f_{\alpha\varkappa\lambda}\, f_{\mu\varkappa\lambda}\, f_{\nu\varkappa\lambda}\, f_{\alpha\beta\gamma}}.$$

Es ist nun zufolge (73):

$$e_\beta^2\, e_\gamma^2\, e_\varkappa^2\, e_\lambda^2 = \frac{f^{12}}{g^{20}}\, f_\beta\, f_\gamma\, f_\varkappa\, f_\lambda\, g_\beta^5\, g_\gamma^5\, g_\varkappa^5\, g_\lambda^5,$$

zufolge (75):

$$e_{\beta\varkappa}^2\, e_{\gamma\varkappa}^2\, e_{\beta\lambda}^2\, e_{\gamma\lambda}^2 = \frac{f^4}{g^8}\, f_{\beta\varkappa}\, f_{\gamma\varkappa}\, f_{\beta\lambda}\, f_{\gamma\lambda}\, g_\beta^4\, g_\gamma^4\, g_\varkappa^4\, g_\lambda^4$$

und nach (71):

$$e^2 = \frac{f^8}{g^{10}}.$$

Danach ist:

$$H = \frac{g_\beta\, g_\gamma\, g_\varkappa\, g_\lambda}{rg^2\, l_\varkappa\, l_\lambda\, e_{\varkappa\lambda}}\, \frac{f_\beta\, f_\gamma\, f_\varkappa\, f_\lambda\, f_{\beta\varkappa\lambda}\, f_{\gamma\varkappa\lambda}\, f_{\alpha\mu\nu}}{f_{\beta\varkappa}\, f_{\gamma\varkappa}\, f_{\beta\lambda}\, f_{\gamma\lambda}\, f_{\alpha\varkappa\lambda}\, f_{\mu\varkappa\lambda}\, f_{\nu\varkappa\lambda}\, f_{\alpha\beta\gamma}}.$$

Diese Formel wird vereinfacht durch eine identische Relation, welche zwischen den Grössen f besteht, und die leicht zu verificiren ist:

$$f_{\alpha\mu\nu} f_{\beta\gamma\varkappa} f_{\beta\gamma\lambda} f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\varkappa\lambda} f_\beta f_\gamma f_\varkappa f_\lambda = f f_{\beta\gamma} f_{\beta\varkappa} f_{\beta\lambda} f_{\gamma\varkappa} f_{\gamma\lambda} f_{\varkappa\lambda}.$$

Aus dieser folgt:

$$\frac{f_\beta\, f_\gamma\, f_\varkappa\, f_\lambda\, f_{\beta\varkappa\lambda}\, f_{\gamma\varkappa\lambda}\, f_{\alpha\mu\nu}}{f_{\beta\varkappa}\, f_{\beta\lambda}\, f_{\gamma\varkappa}\, f_{\gamma\lambda}} = \frac{f\, f_{\beta\gamma}\, f_{\varkappa\lambda}}{f_{\beta\gamma\varkappa}\, f_{\beta\gamma\lambda}}.$$

Dadurch wird:

$$H = \frac{g_\beta\, g_\gamma\, g_\varkappa\, g_\lambda}{rg^2\, l_\varkappa\, l_\lambda\, e_{\varkappa\lambda}}\, \frac{f\, f_{\beta\gamma}\, f_{\varkappa\lambda}}{f_{\beta\gamma\alpha}\, f_{\beta\gamma\varkappa}\, f_{\beta\gamma\lambda}\, f_{\varkappa\lambda\alpha}\, f_{\varkappa\lambda\mu}\, f_{\varkappa\lambda\nu}}.$$

Lösen wir jetzt die Producte $f_{\beta\gamma}$ und $f_{\varkappa\lambda}$ auf, so ergiebt sich:

$$H = \frac{f\, g_\varkappa\, g_\lambda}{rg^2\, l_\varkappa\, l_\lambda\, e_{\varkappa\lambda}} \cdot g_\beta\, g_\gamma\, f_{\beta\varkappa\lambda}\, f_{\gamma\varkappa\lambda}\, f_{\beta\gamma\mu}\, f_{\beta\gamma\nu}.$$

Wir setzen jetzt:

$$\frac{f\, g_\varkappa\, g_\lambda}{rg^2\, l_\varkappa\, l_\lambda\, e_{\varkappa\lambda}} = l_{\varkappa\lambda}, \tag{79}$$

$$u_{\varkappa\lambda} = l_{\varkappa\lambda}\, v_{\varkappa\lambda} = l_{\varkappa\lambda}\, (a_{\varkappa\lambda}\, u + b_{\varkappa\lambda}\, u' + c_{\varkappa\lambda}\, u''). \tag{80}$$

Dann ist $v_{\varkappa\lambda}$ bestimmt durch folgende Gleichung:

$$(81)\qquad \begin{aligned} v_{\varkappa\lambda} = &(-1)^{\beta\gamma|\alpha} g_\beta g_\gamma f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\gamma\varkappa\lambda} f_{\beta\gamma\mu} f_{\beta\gamma\nu} v_\alpha \\ &+(-1)^{\gamma\alpha|\beta} g_\gamma g_\alpha f_{\gamma\varkappa\lambda} f_{\alpha\varkappa\lambda} f_{\gamma\alpha\mu} f_{\gamma\alpha\nu} v_\beta \\ &+(-1)^{\alpha\beta|\gamma} g_\alpha g_\beta f_{\alpha\varkappa\lambda} f_{\beta\varkappa\lambda} f_{\alpha\beta\mu} f_{\alpha\beta\nu} v_\gamma . \end{aligned}$$

Die Coefficienten dieser 21 linearen Functionen sind also ganze rationale Functionen der Coefficienten von v_1, $v_2 \cdots v_7$. Der Factor $l_{\varkappa\lambda}$ ist, ebenso wie $l_\varkappa$ und $e_{\varkappa\lambda\mu}$, die vierte Wurzel eines solchen Ausdrucks; nämlich

$$(82)\qquad l_{\varkappa\lambda}^4 = \frac{r l f_\varkappa f_\lambda g_\varkappa^3 g_\lambda^3}{f g^2 f_{\varkappa\lambda}^2} .$$

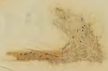
Thesen.

I. Am einfachsten werden die elliptischen Funktionen definirt als solche von einer Variabeln abhängige Funktionen, die eine doppelte Periodicität haben, und überall im Endlichen den Charakter einer ganzen Funktion besitzen.

II. Die Analysis braucht nicht mit unendlich kleinen Grössen zu rechnen.

III. Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der aus ihnen entspringenden Integralfunktionen, in ihrem jetzigen Zustande, ist einer Verallgemeinerung fähig, bei welcher die wichtigsten Resultate bestehen bleiben.

IV. Die Mathematik ist eine Naturwissenschaft.



Der Verfasser, geboren zu Breslau am 24. Juli 1851, Sohn des Oberlehrers Dr. Hermann Schottky, wurde zu den akademischen Studien vorbereitet auf dem hiesigen Magdalenäum. Ostern 1870 mit dem Zeugniss der Reife entlassen, besuchte er ein Jahr lang die Breslauer Universität. Die übrige Zeit seines Studiums brachte er in Berlin zu, anfangs mit Geometrie und mathematischer Physik sich beschäftigend, später mehr der Theorie der Zahlen und Funktionen sich zuneigend. Im Sommer 1875 wurde er in Berlin zum Doctor promovirt.

Druck von W. G. Korn in Breslau.